

К.В. ЧУКБАР

ЛЕКЦИИ ПО ЯВЛЕНИЯМ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ



К.В. Чукбар

Лекции по явлениям переноса в плазме: Учебное пособие /
К.В. Чукбар – Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект»,
2008. – 256 с.

ISBN 978-5-91559-015-0

Курс знакомит с основами современной электронной магнитогидродинамики, локального диффузионного приближения и «странного транспорта».

Две самостоятельные части книги посвящены коллективным гидродинамическим явлениям и генерации и распространению излучения в плазме, охватывая проблематику конвективного и лучистого переноса.

Обсуждение ключевых задач лабораторной и космической физики плазмы во многом основано на оригинальных работах автора.

Для студентов и преподавателей физических и инженерно-физических специальностей, научных работников.

ISBN 978-5-91559-015-0

© 2008, К.В. Чукбар

© 2008, ООО Издательский Дом
«Интеллект», оригинал-макет,
оформление

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	8
Часть 1	
Конвективный перенос в плазме и других средах	11
Лекция 1	13
Уравнения гидродинамики. Законы сохранения. Вмороженность. Магнитная гидродинамика заряженной жидкости. Связь с кинетикой.	
Лекция 2	24
Двужидкостная гидродинамика и вмороженность ротора обобщенного импульса. Базовые уравнения ЭМГ. Ограничения на параметры модели. Энергия, импульс и вектор Пойнтинга в этом приближении. Зависимость эффектов от геометрии.	
Лекция 3	33
Механическая подоплека вмороженности. Физические примеры, классические и квантовые. Двумерный случай: потоковая функция и скобка Пуассона. Бездиссипативная ЭМГ в двумерных геометриях: стационарные течения.	
Лекция 4	43
Динамика магнитного поля в среде с обычным законом Ома. Нестационарный снос в ЭМГ, определяющие параметры и роль диссипации. Задача о скине: точные решения и простые аналогии. Вектор Пойнтинга и общий баланс энергии. Зависимость от геометрии — тонкие пленки.	
Лекция 5	56
Стационарные течения без «просвета». Проблемы с бездиссипативным описанием. Нагрев плазмы и движение ионов. Тензор удельного сопротивления плазмы: магнетосопротивление и эффект Холла. Трехкомпонентная среда. Понятие об ЭМГ-сопротивлении.	

Лекция 6	66
ЭМГ-повышение диссипации. «Эффективная» проводимость с формальной $v_{\text{eff}} = \omega_{pe}$ и полевое представление ЭМГ-сопротивления. Универсальная формула $30 \mu/c$ Ом. Мелкомасштабные флуктуации концентрации и мезоскопическое усреднение. Геометрические эффекты.	
Лекция 7	76
Размер c/ω_{pe} и роль инерции при генерации малых масштабов в ЭМГ. Нетривиальность двумерных стационарных течений при общем законе вмороженности. Задача о скине, конвективные волны и ЭМГ-сопротивление с учетом инерции электронов. Инжекция пучков в плазму: дополнительная конвекция и эффект объемного «размораживания».	
Лекция 8	87
Генерация пучков в диодах, релятивизм. Пучки в плазме, соотношение кинетических и полевых составляющих энергии и импульса частиц. Дрейфовое движение в сильноточном пучке, кинетика. Диффузные и скинированные пучки-пинчи. Усиление взаимодействия со средой.	
Лекция 9	96
Специфика турбулентного конвективного переноса. Стационарный двумерный случай и «затравочная» диффузия. Две теоремы и понятие эффективной диффузии. Три точно решаемые модели. Общий одномасштабный случай, фракталы.	
Лекция 10	111
Эффект скоррелированного сноса. Специфика нестационарной конвекции. Роль пространственной размерности в стохастике. Примеры недиффузионных режимов, номенклатура процессов.	
Лекция 11	124
Турбулентность с широким инерционным интервалом, закон Колмогорова–Обухова. Относительная диффузия и закон Ричардсона. Усреднение по реализациям. Специфика статистики. Размещение лагранжевых инвариантов.	
Часть 2	
Транспорт излучения в плазме	137
Лекция 1	140
Кинетическое описание квантов. Кинетика и термодинамика черного излучения. Причины равновесности, влияние плазмы. Классификация процессов излучения, поглощения и рассеяния.	
Лекция 2	149
Этапы прохождения света сквозь среду. Основное уравнение лучистого переноса в общем случае и в равновесной плазме. Установление равновесия излучения с веществом. Общее решение задачи в базовом варианте.	

Лекция 3	159
Излучение однородного плоского слоя. Проблемы спектра: излучение в узком диапазоне, неоднородная нагретость. Усредненное описание объемного излучения. Диффузия в оптически толстой среде.	
Лекция 4	170
Нелинейное уравнение диффузии. Автомодельные решения. Влияние гидродинамического движения. «Сквозное» описание лучистых потерь.	
Лекция 5	183
Элементарные процессы возбуждения и излучения. Различные типы ионизационного равновесия. «Подавленность» обратных процессов в плазме. Диелектронная рекомбинация. Аппроксимационные формулы для z и «эффективные» показатели адиабаты. Томсоновское рассеяние, эффекты когерентности.	
Лекция 6	194
Тормозное излучение, стандартный вывод. Отличия в физике при малых и больших частотах. Суммарная интенсивность излучения и пробеги. Макроскопический подход к задаче. Связь процессов рассеяния электронов с излучением.	
Лекция 7	205
Фоторекомбинационное излучение νS тормозного. Сечение фотозффекта. Значения и различия l и l' . Малые параметры фоторекомбинации и корональное равновесие. Роль диелектронной рекомбинации.	
Лекция 8	214
Сечение поглощения в линиях. Максимально возможное излучение и минимальный росселандов пробег. Циклотронное излучение, его запираение. Ток Брагинского–Пиза в задаче о z -пинче.	
Лекция 9	224
Корональное равновесие по возбуждениям. Максимально возможное излучение для «богатых» электронных остовов. Доплеровское уширение линий. Другие механизмы уширения.	
Лекция 10	236
Специфика блуждания в линиях. Уравнения в дробных производных. Притягивающая автомодельность и «забывание». Особенности процесса и его связь с матстатистикой.	
Лекция 11	247
Критерий Лоусона. Универсальность параметра ρr . Понятие о детонации как физическом явлении, термоядерная детонация. Использование лучистой энергии для термояда.	

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга Константина Владимировича Чукбара «Лекции по явлениям переноса в плазме» выходит в свет очень своевременно. Принято сетовать на возникший в 1990-е годы недостаток монографий и учебников по физике плазмы на русском языке. Однако даже в англоязычной литературе трудно найти сейчас монографию по явлениям переноса в плазме, не говоря уже о лекционных курсах, где были бы отражены выдающиеся успехи, сделанные специалистами, работающими в этой области, за последние 10–15 лет. Можно вспомнить только вышедшую несколько лет назад книгу К. Iton и др. «Transport and structural formation in plasma».

Курс лекций К. В. Чукбара познакомит читателей с основами электронной магнитогидродинамики, локального диффузионного приближения и, самое главное, расскажет о явлениях «странного транспорта», для описания которых используются уже более сложные математические методы, включая дробное дифференцирование.

Поскольку транспортные явления являются ключевыми для большинства задач лабораторной и космической физики, очень важно донести понимание того, что, как говорит автор, «не единой диффузией жива природа» до всех, кто занимается конкретными задачами термоядерной и астрофизической плазмы, и еще часто находится в плену классических диффузионных представлений.

Книга К. В. Чукбара состоит из двух практически самостоятельных частей: первой, посвященной коллективным гидродинамическим явлениям и второй, в которой обсуждается генерация и распространение излучения в плазме. Читатель получает информацию из «первых рук»: К. В. Чукбар внес очень весомый вклад в разработку новых математических методов теории стохастического переноса и известен своими оригинальными работами, связанными с тематикой как первой, так и второй частей курса лекций.

Материал книги изложен очень физично и последовательно, сначала обсуждаются обычные методы теории диффузии и лишь после того, как их возможности оказываются исчерпаны, автор переходит к языку дробных производных, оказавшемуся очень хорошо приспособленным к решению многих возникающих в практике проблем. Украшает книгу и большое количество наглядных примеров (из разных областей физики) и задач, которыми сопровождается каждая из 22 глав курса.

Курс лекций К. В. Чукбара напомнил мне знаменитые Фейнмановские лекции по физике: изложение не перегружено формальной математической строгостью, автор не стесняется разъяснять принципиальные вопросы теории транспорта достаточно популярно на живом «лекционном» языке. Очень важно, что автору удается передать читателям свою увлеченность этой красивой областью физики и элегантностью математических методов, используемых для ее изучения. В курсе есть, конечно, и множество «трудных» мест, которые потребуют внимательного и сосредоточенного изучения.

В курс лекций вошло всего два раздела общей транспортной тематики — конвективный и лучистый перенос. Хочется надеяться, что работа К. В. Чукбара над развитием этого курса лекций будет продолжена, а настоящий курс, как я уверен, найдет своих внимательных (в том числе, в будущем и англоязычных) читателей и будет активно использоваться как в учебной, так и последующей профессиональной деятельности.

Директор ИКИ РАН,
академик Л.М. Зелёный

ВВЕДЕНИЕ

Явления переноса в плазме — чрезвычайно обширная и трудно-обозримая тема. В своих лекциях, читаемых студентам в магистратуре МФТИ (т.е. уже после прослушивания ими «первичных» плазменных курсов), автор ограничился двумя достаточно самостоятельными ее разделами, объединяемыми по «быстроте» исследуемых процессов. Причины ее весьма различны и обсуждаются в преамбулах к соответствующим частям, тем не менее физическая взаимосвязь между разбираемыми вопросами существует и по возможности прослеживается в тексте. Выбор именно этих разделов глобальной темы связан как с научными интересами и квалификацией автора, так и их важностью (в его же представлении) для даже не столько плазменного, сколько общезфизического образования.

Вообще говоря, всю учебную литературу можно разделить на два класса. Один из них служит выработке умения решать конкретные задачи, детально приучая к новым понятиям и прививая технику обращения с ними. Другой позволяет «встраивать» новую область в базовые знания, давая общее представление о присущей ей системе ценностей и объясняя причины, по которым в строгих решениях получаются именно такие ответы. Тут уместна параллель с преодолением некоего сложного маршрута на местности. С одной стороны, вас могут научить методам постройки лодки из подручных материалов и деталям охоты в тропическом лесу, а с другой — выдать карту маршрута и разблюдовку суточных потребностей человеческого организма. В последнем случае вы будете заранее предвидеть необходимость определенных действий и сможете отказаться от навязывания неэффективного инвентаря (например, снежных очков), но технике этих действий придется все-таки подучиться.

К сожалению, в физике и математике автору известны лишь считанные примеры успешного сочетания обоих классов в одной книге,

и он ни в коей мере не чувствует себя способным на нечто подобное. По-видимому, все дело тут в совершенно разной идеологии подходов. Как представляется, начинать обучение лучше с учебников из первого класса, в последующем упорядочивая информацию с помощью второго. Данная книга (по крайней мере, по намерениям) отнесена ко второму разряду и предполагает наличие серьезной базы — хорошего знакомства с такими дисциплинами как векторный анализ и матфизика в математике и гидродинамика, кинетика и электродинамика в физике. Наиболее важные для поставленных целей понятия из этих курсов напоминаются достаточно подробно, но с идеологической, а никак не технической точки зрения, поскольку главной целью являются именно сообщение современной идеологии, эффективной для анализа конкретных физических ситуаций, и знакомство с иерархией ценностей, в рамках которой удобно изучать различные эффекты, связанные с транспортом чего-либо в плазме и других сплошных средах. В общем, это скорее «Природоведение» нежели «Курс физики», но в области теории и на уровне старших курсов физического вуза. Исходно лекции предназначались для всех студентов, без разделения на теоретиков и экспериментаторов, так что никакой особой технической виртуозности в указанных дисциплинах у читателя не предполагается.

В любом варианте учебная книга в отличие от монографии имеет дело с виртуальной, а не настоящей реальностью. Путешествия в ней разыгрываются, хотя иногда и весьма подробно. Неизбежным следствием этого является переоценка обучаемым своего понимания сути вещей — топоры при имитации постройки лодки не ломаются, и кровавые мозоли не зарабатываются. Такая иллюзия понимания имеет чрезвычайно благотворные последствия и является важным элементом (а в определенном смысле — и целью) обучения. Тем не менее, для преодоления излишеств в этом вопросе (особенно провоцируемых книгами именно второго сорта), в данном курсе достаточно много места уделено недостаткам различных, в том числе и развиваемых самим автором теоретических моделей и невозможности получения ответа на некоторые вопросы вообще. Знакомить с достижениями следует по полной программе, с указаниями на непригодность определенных инструментов и материалов для постройки той или иной конструкции, а также бесперспективности попыток создания, например, левитирующего транспорта — тогда люди и сами не будут зря тратить силы, и откажутся от предложений со стороны относительно покупки изделия, сделанного негодящими методами. Не менее важно знать, что плохими или хорошими инструменты бывают не сами по себе, а в связи с их использованием. То, что можно сделать при помощи иглы, нельзя совершить рубанком, но верно и обратное.

Итак, данная книга имеет декларированной целью обучение не решению реальных задач, а только проведению качественных оценок. Хотелось бы надеяться, что она сможет споспешествовать прикидкам, дающим буквенно правильный ответ (при использовании которого следует помнить, что π — не буква, а число). Тем не менее, каждая лекция заканчивается все же задачами учебными, играющими двойную роль. Во-первых, любое оперирование с понятиями облегчает привыкание к ним, подобно строительству бумажной модели лодки, а во-вторых, они могут выполнять роль «мелкого шрифта», способствуя встраиванию излагаемой системы ценностей в другие структуры, дополняя связи, но не отвлекая от основного хода изложения. Некоторые задачи (явное меньшинство) требуют для решения все-таки определенного технического уровня и могут рассматриваться как свидетельства возможностей теории. Как правило приводятся и решения, что позволило сделать формулировки менее строгими и более жизненными (типа «каковы отличия . . .»).

Из-за широты охватываемого материала в книге пришлось использовать одни и те же буквы для (стандартного!) обозначения разных вещей. Так например, P бывает давлением, числом Пекле, вероятностью и мощностью энерговыделения, а γ — релятивистским фактором, квантом, декрементом затухания или показателем степени в различных скейлингах. Автор надеется, что разнесение этих вещей в пространстве текста и наличие оговорок помогут избежать недопониманий.

В этой части курса рассматриваются процессы, «быстрота» которых связана с наличием в плазме разнообразно направленных интенсивных потоков гидродинамического типа.

Конвективный перенос физических субстанций (тепла, частиц, электромагнитного поля и т. п.) регулярными и турбулентными «текучими» движениями различных сплошных сред (жидкости, газа, плазмы и пр.) чрезвычайно существен во многих практических ситуациях. Хотя детальное его аналитическое исследование требует весьма изысканных и сложных теорфизических методов, вполне удовлетворительное качественное понимание может быть достигнуто на относительно простой и наглядной основе, требующей, однако, хорошего знакомства с гидродинамическим «языком» описания физических явлений: довольно часто существенное продвижение в решении задач бывает связанным не с выводом некой сложной формулы, а с предложением взглянуть на проблему под новым, более правильным углом.

В качестве базы для знакомства с этим языком и выработки соответствующих представлений о конвекции в данном лекционном курсе выбрана модель электронной магнитной гидродинамики (ЭМГ), поскольку, с одной стороны, она описывает такой важнейший для разреженной плазмы процесс как быстрый транспорт магнитного поля, а с другой — вследствие основополагающей роли обобщенного закона вмороженности ее методы и выводы практически без изменений распространяются на весь круг явлений переноса в текучих средах. После привыкания к методу и модели в заключительных лекциях демонстрируется их эффективность в описании и заведомо неплазменных процессов. Они же, тем не менее, содержат и разъяснения

о проблемах такого описания, т. е. автор хотел наряду с простотой действий подчеркнуть их сложность. Действительно, природа достаточно проста, чтобы исследователи могли ее понять, но не дает никакой гарантии, что прост будет сам процесс этого понимания.

Хотелось бы еще раз предупредить читателя, что данную часть не стоит использовать для начального изучения гидродинамики и электродинамики, хотя отдельные «первичные» сведения в ней и содержатся. Ее задача — помочь взглянуть на эту область физики, уже усвоенную обычным порядком, «сверху», с единой позиции увидеть общие связи между различными моделями сплошных сред. Также предполагается, что читатель уже достаточно хорошо знаком с плазмой как объектом и имеет представление о том, что такое например, дебаевский и ларморовский радиусы или дрейфовое движение.

Лекции в значительной мере складывались на основе следующих трех источников, хотя и не тождественны им — это пересекающиеся, но не содержащиеся друг в друге множества. Тем не менее, отдельное изучение указанных обзоров, несомненно, расширит кругозор читателя.

1. *Кингсен А. С., Чукбар К. В., Яньков В. В.* Электронная магнитная гидродинамика // Вопросы теории плазмы: Сб. — Вып. 16. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — С. 209.
2. *Рудаков Л. И. и др.* Генерация и фокусировка сильнооточных релятивистских электронных пучков. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. *Isichenko M. B.* Percolation, statistical topography and transport in random media // Rev. Mod. Phys. — 1992. — V. 64. — P. 961.

Особенно много общего в предлагаемой части с первым номером списка. Во втором отчасти содержатся сведения по менее затрагиваемому вопросу кинетических эффектов в рамках ЭМГ и о влиянии на модель пронизывающих плазму пучков. Третий рассказывает как раз о красивых и сложных современных методах описания стохастического транспорта в турбулентных (и не только) средах. В принципе, к указанным источникам можно присовокупить содержащий некоторые новые по сравнению с [1] результаты изысканий в области ЭМГ обзор *Gordeev A. V., Kingsep A. S., Rudakov L. I.* Electron magnetohydrodynamics // Phys. Rep. — 1994. — V. 243. — P. 215.

Данная часть курса непосредственно относится к сфере профессиональной деятельности автора, его взгляды на эту область физики складывались, главным образом, в процессе конкретной работы, поэтому список рекомендованных книг и получился весьма кратким: из-за надежды (возможно, излишне оптимистичной), что ему самому есть чем поделиться с читателем.

ЛЕКЦИЯ 1

Уравнения гидродинамики. Законы сохранения. Вмороженность. Магнитная гидродинамика заряженной жидкости. Связь с кинетикой.

Как было сказано в преамбуле к части, исходным инструментом для описания физических явлений здесь будет гидродинамический язык. В первой лекции стоит вспомнить его основные положения и особенности. Гидродинамическое описание текучих сред (сплошных и подвижных), очень удачно в англоязычной литературе называемых единым словом *флюиды*, использует распределенные параметры или физические поля, т. е. каждая (обычно добавляют: «физически бесконечно малая») точка области, занимаемой конкретным флюидом, обладает каким-то своим значением скалярной, векторной или тензорной величины (или совокупности нескольких из них), характеризующей состояние системы.

В наиболее простом и привычном случае обычной гидро- или газодинамики, с которого удобно возобновить знакомство с теоретическим инструментарием, такими величинами являются характеристики внутренних свойств и движения жидкости/газа, например, плотность, давление и скорость как функции пространственных координат

$$\rho(\mathbf{r}), \quad P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) \text{ etc.},$$

т. е. приходится иметь дело именно с полем плотности, скорости и пр. Отсюда следует важный вывод, что фактически эта наука представляет собой простую сумму термодинамики и механики, отягченную необходимостью оперировать частными производными, поскольку параметры системы зависят не только от времени. Можно сказать и по-другому: распределенная система представляет собой бесконечную совокупность взаимодействующих обычных систем.

Одним из наиболее эффективных инструментов для исследования поведения физических объектов является анализ их законов сохранения, вводящих все разнообразие возможной эволюции в достаточно узкие и четко определенные рамки. Все происходит по своим правилам, и главное — понять ограничивающие и регламентирующие предписания природы. Именно из этого обстоятельства стандартно и выводятся собственно гидродинамические уравнения. Суть подхода заключается в переходе от интегральной сущности (эволюции конечных кусков среды, известной из обычных механики и термодинамики), к локальной дифференциальности (ее бесконечно малым элементам). Рассмотрим эту процедуру в обычном порядке.

Сохранение вещества может быть использовано двояким образом. «Обобщенный закон Ломоносова–Лавуазье» утверждает, что в фиксированном в лабораторной системе координат (жестком) объеме количество вещества (массы) может изменяться только вследствие явного потока через его границы

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\phi} \rho dV = - \int_{F_\phi} \rho \mathbf{v} d\mathbf{f} \rightarrow \int_{V_\phi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 : \quad (1.1)$$

обыкновенная временная производная вносится под данный интеграл с неизменными пределами в виде уже частной (ведь ρ зависит и от пространственных переменных), и теорема Гаусса сводит поверхностный интеграл к единообразному объемному.

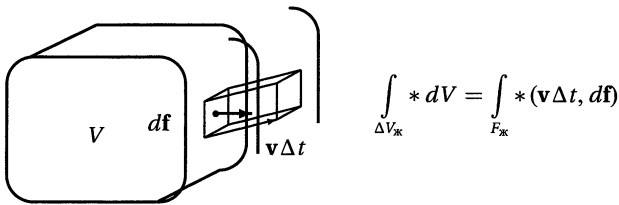


Рис. 1.1. Вклад изменения объема

Если же рассмотреть баланс в так называемом жидком, «приклеенном» к частицам флюида объеме то

$$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho dV = 0,$$

и здесь аналогичная формула получается за счет того, что дифференцированию подвергаются и переменные пределы интегрирования

$$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho dV = \int_{V_k} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{dV_k/dt} \rho dV.$$

Смысл этой стандартной математической операции можно наглядно увидеть из анализа изменения данного интеграла за $\Delta t \rightarrow 0$

$$\Delta \int_{V_k} * dV = \int_{V_k} \frac{\partial *}{\partial t} \Delta t dV + \int_{\Delta V_k} * dV.$$

Поскольку изменение объема связано с его «выпираем» (с учетом знака!) через исходные границы (рис. 1.1), то все возвращается к выводу (1.1) с заменой $V_\phi \rightarrow V_k$.

Это соотношение имеет место для произвольных V_ϕ и V_κ — следовательно обязательно должно выполняться уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad \vee \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

записанное в двух видах. Прослеженное при его выводе различие в языках описания существует и на дифференциальном уровне: в физике сплошных сред принято использовать и обычную частную $\partial/\partial t$, и так называемую субстанциональную d/dt (не путать с обыкновенной), характеризующую эволюцию среды в сопутствующей системе координат:

$$f(t, \mathbf{r}) \rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \Delta \mathbf{r}, \quad \Delta_\kappa \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t,$$

производные. Соответствующие формы представления эволюции стандартно носят названия эйлера и лагранжева описания. Каждое имеет свои особенности и удобства, совпадающие со знакомыми из обычной механики — речь ведь идет об использовании системы отсчета наблюдателя или той, в которой живут частицы. Разные задачи (и разным физикам) сподручнее решать с различных точек зрения.

Формула (1.2) может служить моделью всех последующих законов сохранения: для сплошной среды они всегда имеют вид баланса между изменением плотности какой-либо величины и плотностью ее потока, а также (в случае его нарушения) еще и интенсивностью обмена этой величиной с каким-то внешним резервуаром (для вещества, например, за счет химических реакций):

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{G} = \mathcal{G}.$$

Поскольку в физике плазмы принято описывать количество вещества не его плотностью, а концентрацией согласно соотношению $\rho_\alpha = n_\alpha M_\alpha$, то дальше будет использовано именно такое представление (здесь и далее индекс α описывает разные компоненты плазмы, как правило пробегая значения e, i).

Сохранение импульса. Здесь уже, чтобы не усложнять жизнь описанием движения куска среды с переменной массой, как правило, пользуются только одним подходом из двух, рассматривая изменение количества движения исключительно в жидком объеме

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\kappa} n M \mathbf{v} dV = - \int_{F_\kappa} P d\mathbf{f} = - \int_{V_\kappa} \nabla P dV,$$

где P — давление со стороны окружающих участков флюида на данный, направленное внутрь него, т. е. против внешней нормали. В об-

щем случае внутренняя сила со стороны других частиц не обязательно перпендикулярна к границе данного элемента и характеризуется тензором напряжений

$$-\int_F \Pi_{ik} df_k = -\int_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

(для давления $\Pi_{ik} = P\delta_{ik}$), но как правило все равно локальна (приложена к границе) из-за короткодействия межмолекулярных сил. Тем не менее, встречаются и объемные — внешние — силы (например, гравитация), воздействующие непосредственно на внутренность куска. В этом случае, особенно при непотенциальности таких сил, импульс флюида может перестать сохраняться (появляется \mathcal{G}). В разбираемом же варианте

$$\frac{\partial}{\partial t} nMv_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (nMv_i v_k + P\delta_{ik}) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь плотность сохраняемой величины представляет собой вектор, а ее поток, следовательно, имеет тензорную природу.

На самом деле закон сохранения импульса в замкнутой системе первичен в силу исходной нетеровой симметрии нашего мира, поэтому вклад объемных, но самосогласованных сил тоже дивергентен (см. ниже).

Часто (1.3) выводят также и из второго закона Ньютона для текущего элемента

$$nM \frac{dv}{dt} = nM \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P, \quad (1.4)$$

используя его вкпе с уравнением непрерывности для непосредственного вычисления $\partial(nM\mathbf{v})/\partial t$.

Сохранение момента импульса не вносит в данном случае ничего нового. В обычной гидродинамике соответствующий закон может быть получен банальным векторным умножением (1.3) на \mathbf{r} (т.е. сверткой с $e_{lji}x_j$), который очень легко вносится под дивергенцию.

Сохранение энергии. Для реального оперирования с выписанными уравнениями нужна информация о связи между n и P , называемой уравнением состояния данной среды. В физике плазмы обычно используют две модели: идеального газа ($P = nT$) и несжимаемой жидкости ($n = \text{const}$). Однако, сразу бросается в глаза их явная неполнота — действительно, первый вариант вводит в рассмотрение новую никак не определенную скалярную величину T , а второй, и того хуже, вообще ничего не говорит о P (парадоксальным образом именно он зачастую оказывается вполне самодостаточным, см. ниже).

На самом деле для замыкания описания требуется еще и уравнение для внутренней энергии среды (первое начало термодинамики):

$$\frac{dE}{dt} = T \frac{dS}{dt} - P \frac{dV}{dt}.$$

Теперь в него входят физические поля (функции от \mathbf{r}), поэтому здесь следует использовать именно субстанциональную производную (т. е. опять-таки применять закон к системе с постоянным составом). Обычно выбирают $V = 1/n$ ($V = 1/\rho$), т. е. нормируют термодинамические характеристики вещества на 1 частицу (на 1 г). После расписывания d/dt отсюда получается как раз недивергентное соотношение для E , поскольку в этом законе представлена не вся энергия флюида.

Если в описываемой среде есть источники тепла (вязкость, теплопроводность и пр.) или его стоки (излучение фотонов или нейтрино и пр.), то $\dot{S} \neq 0$, в противном случае справедлива адиабата (закон сохранения энтропии):

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial nS}{\partial t} + \operatorname{div} nS\mathbf{v} = 0$$

(опять-таки с учетом (1.2)). В таком варианте $dE = -PdV = Pdn/n^2$, и добавление кинетической энергии механического движения порождает уже относительно полный энергетический баланс в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nMv^2}{2} + nE \right) + \operatorname{div} \left[\left(\frac{nMv^2}{2} + nE \right) \mathbf{v} + P\mathbf{v} \right] = 0, \quad (1.5)$$

причем «внутренние» составляющие потока энергии могут быть объединены с использованием понятия удельной энтальпии $nE + P = nW$. Это упрощенный закон сохранения — в нем не учтены возможные трение (в том числе вязкое) в динамическом уравнении, определяющем $\partial v^2/\partial t$, и отсутствие адиабатичности (изэнтропичности) во внутренне-энергетическом, порождающее $nT dS/dt$ в правой части, — но на самом деле наличие диссипации усложняет, но не отменяет его. В полном (замкнутом) варианте все добавки к выписанной формуле дивергентны — для вязкости и теплопроводности это получается автоматически (они участвуют в перераспределении энергии, но никак не меняют ее полной величины, т. е. входят именно в поток), а вот наличие излучения требует включения в (1.5) еще и нового энергетического слагаемого, без которого вместо 0 справа появляется $\pm Q$.

Очень важно подчеркнуть, что согласно (1.5) поток энергии — это не просто ее перенос с веществом, но еще и способность к работе $\Pi_{ik}v_k$! Без понимания этого обстоятельства в жизни можно столкнуться с тяжелыми парадоксами механики сплошных сред (см. задачи 1 и 2).

Видно также, что стандартное соотношение $P = nT$ на самом деле не дает всей необходимой для решения гидродинамических задач информации об энергии флюида. Уравнение состояния следует брать в «естественных переменных» из первого начала $E(S, n)$:

$$E = \text{const} \cdot \exp[(\gamma - 1)S] n^{\gamma-1}$$

(γ — показатель адиабаты). Из него, в частности, следует и стандарт: действительно, $T = (\partial E / \partial S)_n = (\gamma - 1)E$ и $P = n^2(\partial E / \partial n)_S = (\gamma - 1)nE$.

Вмороженность. Это наиболее характерный исконно «гидродинамический» закон сохранения, являющийся сутью любого флюида и квинтэссенцией его описания. Он возникает якобы как следствие динамического уравнения (1.4), но в действительности абсолютно универсален и даже первичен по отношению к конкретным ньютоновским законам движения (см. последующие лекции).

Если энтропия $S = \text{const}$ сразу и во времени, и в пространстве, то каждая термодинамическая величина является функцией любой другой, в частности, $n = n(P)$ и $P = P(n)$. В этом случае (а также при несжимаемости течения, т. е. $n = \text{const}$) сила, действующая на жидкие частицы, потенциальна, причем ее потенциал имеет простой физический смысл: $\nabla P / n = \nabla W$, поскольку $dW = TdS + VdP$. Следовательно, можно трансформировать (1.4) в

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}] - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{W}{M} \right)$$

или

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}] \quad (1.6)$$

(для несжимаемой среды добавление к (1.6) «связи» $\text{div } \mathbf{v} = 0$ позволяет однозначно проследивать эволюцию \mathbf{v} , т. е. давление вообще как бы исключается из динамики, что и делает несжимаемую модель вполне операбельной — значение $P(\mathbf{r}, t)$, буде таковое представляет интерес, можно восстановить, подставляя найденную скорость в (1.4)).

Это и есть замечательное уравнение вмороженности. Из него, например, следует сохранение циркуляции скорости по жидкому контуру $\oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$ (или потока ее ротора через натянутую на этот контур поверхность $\int_F \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{f}$). Действительно, для любого $F_{\text{ж}}$

$$\frac{d}{dt} \int_{F_{\text{ж}}} \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_{F_{\text{ж}}} \frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{f} - \oint_{L_{\text{ж}}} [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}] d\mathbf{l} = 0$$

в силу (1.6) и теоремы Стокса: изменение поверхности, натянутой на контур, определяется узкой ленточкой (опять-таки как и в случае

с объемом с учетом знака) вдоль него (рис. 1.2). Полезным упражнением является проведение выкладок непосредственно для $\oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$ — здесь уже $\int_{\Delta L_{ж}}$ в отличие от рассмотренных ранее случаев не сводится к интегрированию по объекту меньшей размерности (см. задачу 3).

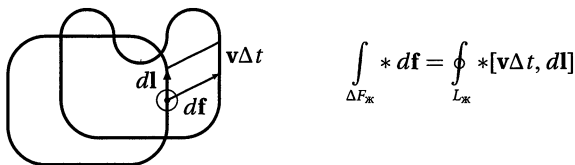


Рис. 1.2. Вклад изменения натянутой на контур поверхности

Ключевой для использования такого представления динамики вопрос — какие ограничения накладывает этот великий закон механики сплошных сред на эволюцию системы? Фактически уравнение (1.6) описывает снос линий $\text{rot } \mathbf{v}$ течением флюида. Соответствующие деформации этого векторного поля могут быть весьма значительными, но не способны изменить его топологию: замкнутые и разомкнутые линии ротора остаются таковыми навсегда, зацепленность их друг за друга также неизменна. Неизменно и их отсутствие: потенциальность течения $\mathbf{v} = -\nabla\psi$ согласно (1.6) сохраняется вечно. Топологические ограничения не самые сильные, поскольку в рамках этой науки окружности неотличимы от квадратов, но зато глубоко фундаментальны и касаются самой сути объектов.

Таковы уравнения и законы обычной гидро- и газодинамики. В физике же плазмы приходится иметь дело не с обычными, а заряженными жидкостями, что приводит к существенным добавкам в формулах. Мало того, что в уравнении движения наряду с локальными силами теперь действует и объемная сила Лоренца

$$n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{E} + n_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{c} [\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{B}].$$

Более принципиально, что расширяется число характеристик системы — к полям старой сплошной среды добавляется поле электромагнитное (собственно, с точки зрения гидродинамического подхода оно тоже представляет собой «сплошную среду»). Для него, правда, уже существуют уравнения Максвелла. В общем, как и в классическом случае, исходная двучленная формула «гидродинамика — это есть механика плюс термодинамика» для плазмы требует добавки «плюс электродинамика». Сращивание происходит именно по линии неоднократно упомянутого выше самосогласования теоретической модели: приобретаая заряд, старая механическая система (или системы, если,

как это и бывает в физике плазмы, рассматривается многокомпонентная динамика) выступает в роли источников, обычно внешним образом встраиваемых в уравнения Максвелла.

В результате в полной системе появляются новые плотность энергии

$$\frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

(желательно не путать электрическое поле с обозначаемой той же буквой энергией!), ее поток — вектор Пойнтинга

$$c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{4\pi},$$

а также плотность импульса (тот же вектор Пойнтинга, деленный на c^2) и его поток, называемый максвелловским тензором напряжений (см. задачу 4). К плотности момента импульса наряду с банальным полевым вкладом добавляется и нетривиальная поляризационная составляющая. Есть и новые диссипативные эффекты, из коих самым важным (и единственным в данной части) является джоулев нагрев. Тем не менее, анализ эволюции и таких флюидов все равно удобно проводить на основе законов сохранения, в том числе и вможенности.

В заключение лекции для осознания пределов применимости и возможности выхода за рамки используемой модели сплошной среды полезно взглянуть на гидродинамику с позиций более общей теории. Поскольку она базируется на термодинамике (и вообще на предположении о некоем «едином» поведении каждой бесконечно малой, но на самом деле макроскопической частицы — см. ниже), то хорошо «работает» лишь вблизи состояния равновесия. В противном случае применима более сложная механическая модель — кинетика, описывающая эволюцию функции распределения настоящих микроскопических (а не физически бесконечно малых) частиц среды в шестимерном фазовом пространстве $\mathbf{r}_6 = \{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ или $\mathbf{r}_6 = \{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{M_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{B}]}{c} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = st(f_\alpha), \quad (1.7)$$

причем характеристики этого кинетического уравнения совпадают с траекториями механического движения реальных частиц:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\{f, H\}}_{(\mathbf{v}_6 \nabla_6) f} = st(f). \quad (1.8)$$

Возможна запись сносового вклада в изменение функции распределения (скобки Пуассона f и H) и в форме шестимерной дивергенции

$\text{div}_6 f \mathbf{v}_6$ — вследствие несжимаемости гамильтонова течения в фазовом пространстве (теорема Лиувилля).

Стандартный вывод гидродинамических уравнений из этой старшей по иерархии теории заключается в следующем: домножая (1.7) последовательно на 1, \mathbf{v} и $v^2/2$ и интегрируя его по $d^3\mathbf{v}$, получают искомые соотношения для эволюции n , \mathbf{v} и E . При этом интеграл столкновений st как бы выпадает из ответа — дает вклад лишь в малые диссипативные члены, — поскольку сохраняет и число частиц, и их импульс, и энергию (если столкновения происходят только между частицами одного сорта). В результате вместо функции распределения по скоростям систему пытаются описать лишь тремя ее моментами, причем эволюция каждого зависит от последующего: в уравнение непрерывности входит $\langle v \rangle$, характеризующее совместное движение реальных частиц внутри жидкой частицы \mathbf{v}_α , в динамическое уравнение — $\langle v^2 \rangle$, соответствующее давлению P_α , и т. д. Цепочку можно безболезненно оборвать и свести функциональное многообразие свойств среды к всего лишь нескольким «флюидным» числам (своим в каждой точке \mathbf{r}) только, если в результате того или иного физического процесса в системе устанавливается какая-либо универсальная форма функции распределения, поскольку в таком варианте указанное кинетическое разнообразие остается внутри одного класса функций.

Обычно процесс универсализации связан с доминированием в кин-уравнении интеграла столкновений. Формально не проявляясь в ответе, он играет важнейшую роль организатора коллектива частиц, обеспечивая адекватность описанной методы действий. Сильностолкновительная система действительно все время находится вблизи равновесия, и ее функция распределения близка к максвелловской с как раз тройной параметризацией $f_\alpha = n_\alpha f_{T_\alpha}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)$, где гидродинамические характеристики n , T и \mathbf{v}_α «медленно» зависят от t и \mathbf{r} в сравнении с характеристиками st — обратной частоты столкновений и длиной пробега реальных частиц (которая, стало быть, и ограничивает снизу размеры частиц жидких). Однако в горячей плазме $st \rightarrow 0$. Стандартно считается, что роль столкновений тогда берет на себя как правило присутствующее в системе магнитное поле. На самом деле все гораздо сложнее, новая ситуация отнюдь не сводится к простой замене $\nu_{st} \rightarrow \omega_{B\alpha}$, $\ell_{st} \rightarrow \rho_{B\alpha}$. Быстрое циклотронное вращение заряженных частиц в магнитном поле обеспечивает лишь симметризацию f и то только поперек \mathbf{B} , но никак не подобие ее формы, т. е. при использовании гидродинамического языка для описания горячей плазмы необходима предельная внимательность. Ситуацию, как будет показано в дальнейшем, облегчает неважность формы функций распределения электронов и ионов во многих интересных процессах.

Неприменимость гидродинамики (кстати, одной из самых сложных теретических дисциплин в физике) к каким-либо реальным ситуациям существенно усложняет жизнь исследователям. Кинетику даже при $st \equiv 0$ решать весьма трудно. Однако для стационара в бесстолкновительном пределе работает очень упрощающее жизнь (и используемое в восьмой лекции) соображение: любая функция от H , равно как и других интегралов движения (G), есть решение — ведь $\{G, H\}_{\text{г.р}} = 0$ (см. (1.8)).

ЗАДАЧИ

1. Бурлаки тянут вверх по течению реки баржу. Поскольку совершаемая ими работа расходуется на преодоление силы сопротивления воды и увеличение потенциальной энергии судна, то для сидящего на берегу стороннего наблюдателя должен существовать поток энергии через бечеву от бурлаков к барже. Однако положительная потенциальная (вследствие растяжения) и кинетическая энергии троса несомненно перетекают по его скорости \mathbf{v} , т. е. в противоположном направлении. Где требуемый поток?

Решение. Указанные составляющие потока связаны с тем, что трос (бечева) с одной стороны наблюдателя (справа, если он сидит на высоком берегу в северном полушарии) убывает, а с другой (тогда слева) — прибывает вместе со своей энергией. Поток же, расходуемый на работу, равен произведению скорости бечевы на ее (отрицательное) напряжение и по нему антипараллелен \mathbf{v} , т. е. направлен в другую (необходимую) сторону. Его величина неизмеримо выше, поскольку пропорциональна первой степени деформации бечевы, в то время как энергия деформации — квадрату этого малого параметра: бурлаки трудятся над баржей, а не над растяжением своего орудия производства.

2. Аналогично при поднятии ведра с водой из колодца с воротом, должен существовать поток энергии вдоль оси ворота. Откуда он берется, если скорость вещества (например, дуба) вдоль этого направления вообще отсутствует?
3. Проверить непосредственно сохранение циркуляции скорости по жидкому контуру в законе вмороженности.

Решение. Согласно стандартной процедуре

$$\frac{d}{dt} \oint_{L_{\text{ж}}} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \oint_{L_{\text{ж}}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{l} + \oint_{dL_{\text{ж}}/dt} \mathbf{v} d\mathbf{l},$$

причем с вкладом от изменения контура можно поступать двояким образом. Более простым является вариант, использующий теорему Стокса

$$\oint_{dL_{\text{ж}}/dt} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int_{dF_{\text{ж}}/dt} \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{f} = \oint_{L_{\text{ж}}} \text{rot } \mathbf{v} [\mathbf{v}, d\mathbf{l}].$$

Он удобен для подстановки в первый интеграл (с $\partial \mathbf{v} / \partial t$) «препарированного» динамического уравнения с выделенным $\nabla(v^2/2)$. Оперирование же с исходным уравнением движения (1.4) требует более громоздких выкладок. Здесь надо учитывать, что движение контура проявляется, во-первых, в изменении интегрируемой вдоль его нового положения функции \mathbf{v} , и, во-вторых, в деформации его формы (поворотах и растяжениях $d\mathbf{l}$):

$$\oint_{dL_{ж}/dt} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \oint_{L_{ж}} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} d\mathbf{l} + \oint_{L_{ж}} \mathbf{v} (d\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}.$$

Первое слагаемое может быть объединено с интегралом от $\partial \mathbf{v} / \partial t$ в виде $\oint d\mathbf{v} / dt d\mathbf{l}$, а второе сводится к интегралу от $\nabla(v^2/2)$. При любой методе остается воспользоваться тривиальным фактом зануления контурного интеграла от градиента любой функции.

4. Исходя из уравнений Максвелла «с источниками»

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

выписать энергетический и импульсный балансы для электромагнитного поля.

Решение. Плотность полевой энергии удовлетворяет известному балансу

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left(c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{4\pi} \right) = -(\mathbf{j}, \mathbf{E}),$$

а плотность соответствующего импульса — реже приводимому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]_i}{4\pi c} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \delta_{ij} - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi} \right) = -\rho E_i - [\mathbf{j}, \mathbf{B}]_i.$$

Видно, что вследствие внешнего обмена, ни энергия, ни импульс поля сами по себе, вообще говоря, не сохраняются, утекая (или притекая) в механическую (гидродинамическую) систему источников. Это обстоятельство, кстати, позволяет получать явные выражения для плотностей энергии и импульса поля не только через теорему Нетер, но и из естественного требования сохранения указанных величин в замкнутой системе, подкрепленного известными из механики выражениями для действующих на заряды и токи сил.

ЛЕКЦИЯ 2

Двужидкостная гидродинамика и вмороженность ротора обобщенного импульса. Базовые уравнения ЭМГ. Ограничения на параметры модели. Энергия, импульс и вектор Пойнтинга в этом приближении. Зависимость эффектов от геометрии.

Вспомнив основные общие особенности флюидного языка для описания реальных заряженных сред, можно перейти к конкретной электронной магнитной гидродинамике, представляющей собой как раз один из вариантов кооперации гидро- и электродинамики, причем с весьма примитивной первой частью. Фактически с позиций общей физики основное приближение ЭМГ есть все-таки электродинамика сред с эффектом Холла (и следовательно, с доминированием одного типа носителей тока). Все определяется добавляемым к уравнениям Максвелла так называемым материальным уравнением — обобщенным законом Ома

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{1}{nec} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]}_{\text{sic!}} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (1.9)$$

дающим, несмотря на кажущуюся простоту, весьма сильные отличия от привычной и описанной во многих учебниках картины эволюции электромагнитного поля в хорошо проводящей среде (т.е. в отсутствие специально выделенного первого члена в правой части (1.9)). Плазма, несомненно являясь хорошим проводником (ее σ велико), ведет себя сложнее своих излишне примитивных моделей.

Применимость (1.9) к описанию достаточно широкого круга явлений в плазме представляется исходно очевидной — действительно, доминирование гораздо более легких электронов в переносе тока очень естественно. Тем не менее, вывод этого закона Ома все же весьма полезен, поскольку помогает как явно очертить сей круг, так и подготовиться к возникающим задним числом сомнениям в очевидности приближения после знакомства с его неожиданными следствиями. Чтобы понять, в каком окне параметров (1.9) справедливо для плазмы, стоит начать с более общей модели двужидкостной гидродинамики, рассматривающей раздельную жизнь и взаимодействие (через общее электромагнитное поле и локальное взаимное трение) двух компонентов этой среды:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= m \left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e \right) = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}] + \mathbf{F}_{\text{Тр}} - \frac{\nabla P_e}{n}, \\ M_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= M_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i \right) = ze\mathbf{E} + \frac{ze}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}] - \frac{n}{n_i} \mathbf{F}_{\text{Тр}} - \frac{\nabla P_i}{n_i}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

дополненной парой уравнений Максвелла, связанной с эволюцией магнитного поля

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{e(zn_i \mathbf{v}_i - n\mathbf{v}_e)}_j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.11)$$

(существенное, но примитивное соотношение $\text{div } \mathbf{B} = 0$ здесь и как правило далее не выписывается, но, конечно, подразумевается). Важно понимать, что хотя (1.10) и похожи на уравнения Ньютона для отдельных электронов и ионов, но в действительности описывают движение макроскопически малых жидких частиц электронного и ионного компонентов (см. далее).

Если в (1.10) $\mathbf{F}_{\text{тр}} \rightarrow 0$ и $P_\alpha = P_\alpha(n_\alpha)$ (или тоже мало — здесь такой предел в отличие от обычной гидродинамики (1.4) отнюдь не тривиален, ибо на флюиды действуют и другие силы), то с этими динамическими уравнениями можно провести процедуру, аналогичную выводу (1.6) — выделить потенциальную составляющую из $(\mathbf{v}_\alpha \nabla) \mathbf{v}_\alpha$ и взять ротор, воспользовавшись (1.11) для избавления от \mathbf{E} . В результате старые механические и новые полевые составляющие каждой системы очень удачно объединяются в единые блоки, что приводит к аналогичному же универсальному ответу:

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{K}_\alpha}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}_\alpha, \text{rot } \mathbf{K}_\alpha]. \quad (1.12)$$

Входящая в него «блоковая» величина \mathbf{K} имеет простой физический смысл обобщенного импульса микроскопических частиц соответствующего плазменного компонента

$$\mathbf{K}_\alpha = M_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \mathbf{A}$$

(\mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля).

Соотношение (1.12) остается неизменным даже в случае релятивистских течений плазменных составляющих, когда в (1.10) происходит замена $M_\alpha d\mathbf{v}_\alpha/dt \rightarrow d\mathbf{p}_\alpha/dt$ с $\mathbf{p} = M\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ (его вывод в таком общем варианте представляет собой полезное упражнение, см. задачу 1). Итак, фундаментальный гидродинамический закон, являющийся сутью любого флюида, принимает в плазме форму вмороженности ротора обобщенного импульса каждого компонента в собственное течение, т. е. в рамках его епархии электронная и ионная жидкости ведут себя «независимо» (относительно этой независимости см., впрочем, ниже). На самом деле именно эта форма является общей и глубоко фундаментальной. Важно, что теперь сия эволюционирующая физическая величина имеет две составляющие: механи-

ческую и полевую. Их иерархия и определяет специфику движения плазмы как в целом, так и покомпонентно. К этому обстоятельству стоит присмотреться поближе.

Действительно, в реальности чрезвычайно редко встречаются ситуации, когда совершенно по-разному зависящие от параметров задачи, но аддитивно участвующие в ней величины имеют одинаковый порядок величины. Как правило, доминирует какая-то одна составляющая. Если в разбираемой модели и у электронов, и у ионов главной является полевая составляющая их \mathbf{K} , то речь идет о сносе одной и той же физической величины (благо обе они пропорциональны одному \mathbf{V}) формально двумя разными течениями, что возможно лишь при тесной связи (малой разности) их скоростей: немислимо, чтобы одна и та же субстанция одновременно сносилась электронами, например, с севера на юг, а ионами с востока на запад

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_i = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad v \gg \frac{j}{ne}.$$

Иными словами, в этом режиме оба плазменных компонента ведут себя единым образом, будучи достаточно жестко «сцепленными» между собой. Это приближение называется *одножидкостной магнитной гидродинамикой (МГД)*, описывающей как раз обычную проводящую среду. Стандартно его выводят, постулируя добавление силы Ампера в динамическое уравнение обычной же одножидкостной гидродинамики

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] - \nabla P, \quad \rho = n_i M_i$$

и учитывая необходимость обращения в нуль электрического поля (при $\sigma \rightarrow \infty$) в сопутствующей системе координат

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

(см. первое уравнение в (1.11)).

При используемом же здесь подходе первое соотношение есть просто результат сложения двухжидкостных уравнений (1.10) с учетом единства скоростей (малый их разбаланс определяет ненулевую плотность тока), квазинейтральности плазмы ($n = zn_i$) и малости электронной инерции по сравнению с ионной, тогда как второе — чисто электронное уравнение с опущенной же инерцией (и давлением). Результат один, но идеологические выгоды настоящего вывода велики. Во-первых, ясны сделанные предположения и границы применимости (см. ниже). Во-вторых, становится понятной неожиданная замена (1.6) на нечто совершенно другое (в какой момент она происходит при постулировании?). В действительности это два предельных случая одно-

го и того же закона вмороженности при $|\text{rot } \mathbf{v}_i| \gg v \ll \omega_{Bi}$. Различие вмороженных величин свидетельствует о различиях в гидродинамиках, но общность закона говорит о внутреннем единстве флюидов.

Если же в \mathbf{K} компонентов доминируют разные слагаемые, то течения электронов и ионов «отрываются» друг от друга: различия в переносимой величине вызывают различия в движении. Естественно, инерция раньше сказывается на движении ионов. Границы перехода от обычной МГД определяются пространственным масштабом («толщиной») тока a : механическая составляющая обобщенного импульса ионов, движущихся с характерными скоростями (как это следует из динамического уравнения МГД) порядка альфвеновских, должна превысить их полевую составляющую

$$v_i \sim v_A \sim \frac{B}{\sqrt{n_i M_i}} \gg \frac{ze \overbrace{Ba}^A}{M_i c}.$$

С точки зрения ионов происходит возврат к вмороженности $\text{rot } \mathbf{v}_i$ в \mathbf{v}_i . С другой стороны, для гораздо более быстрых электронов — они автоматически начинают доминировать в переносе тока, поскольку одновременно

$$v_i \ll \frac{j}{ne} \sim \frac{cB}{nea}$$

(см. (1.11)) — справедлива старая иерархия слагаемых, если

$$|\mathbf{v}_e| \approx \frac{|-\mathbf{j}|}{ne} \ll \frac{eBa}{mc}.$$

Следовательно, при так называемом малом, но не предельно малом «погонном ионе»

$$\frac{zm}{M_i} \ll n_i a^2 \frac{z^2 e^2}{M_i c^2} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \frac{c}{\omega_{pe}} \ll a \ll \frac{c}{\omega_{pi}} \quad (1.13)$$

получившие самостоятельность электроны по-прежнему тащат с собою исключительно \mathbf{B} . При фиксированном a «окно» существования режима занимает более трех порядков по концентрации. Чтобы почувствовать цифры, достаточно заметить, что правая граница, знаменующая неправомочность обычной МГД-модели, проходит в водородной плазме с $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при $a \sim 3 \text{ см}$.

Проведенный разбор говорит, что в рамках (1.13) магнитное поле с точностью до знака вморожено в ток, а ионы в первом приближении неподвижны, так что динамика среды определяется одним электронным уравнением. Ежели, кроме того, при столь различных течениях своих компонентов плазма остается квазинейтральной, то в этом

электронном уравнении задана функция $n(\mathbf{r})$ — «статичные» ионы все же определяют фон, на котором развиваются быстрые электронные события, и, как будет видно из дальнейшего, порождаемая медленными ионными движениями неоднородность n оказывается очень существенной, если не определяющей для этих событий: статисты бывают равноправными, хотя и своеобразными участниками действия.

В разбираемом варианте (1.10), (1.11) очень легко учитывается и присутствующая в них диссипация: поскольку здесь

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} \stackrel{\text{def}}{=} -m \frac{\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i}{\tau_e} = e \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \quad \left(\sigma = \frac{ne^2 \tau_e}{m} \right),$$

где τ_e — характерное время передачи электронами своего механического импульса ионам (фактически именно эта формула и служит ее определением) или обратная частота их столкновений ν_e^{-1} , то следующий в безмассовом пределе из ротора динамического электронного уравнения в (1.10) закон

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \left[\frac{\mathbf{j}}{ne}, \mathbf{B} \right] = -\frac{c}{\sigma} \text{rot } \mathbf{j} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B} \quad (1.14)$$

добавляет при учете (ср. (1.11))

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}$$

(что уже использовалось при оценке j через B) к вмерзности магнитного поля в ток еще и диффузию \mathbf{B} . Уравнение непрерывности в такой гидродинамике электронов удовлетворяется тождественно в силу ее квазинейтральности и «квазистатического» уравнения Максвелла.

Собственно, на этом и заканчивается вывод — или оправдание — обобщенного закона Ома (1.9): результат его подстановки в (1.11) совпадает с (1.14). Осталось лишь доопределить пределы применимости (к (1.13)) и обсудить специфику. Стоит особо обратить внимание на то, что «неподвижность» ионов формальна: $v_i \ll v_e$, но $v_i \neq 0$, и хотя в большинстве задач изменением n_i за электронные времена можно пренебречь, но ситуация при этом не является равновесной, т. е. не предусматривает баланса сил, действующих на плазму в целом.

Весьма облегчающая анализ квазинейтральность эволюции, а именно $|n - zn_i| \ll n$, соответствует нерелятивизму электронного течения: пренебрежение током смещения (отвечающим за возникновение зарядов) хорошо при $v_e \ll c$, поскольку при своей вмерзности магнитное поле эволюционирует за счет сноса именно \mathbf{v}_e . Другая форма записи этого неравенства — малость так называемого магнитного

дебаевского радиуса в сравнении с характерным пространственным масштабом поля

$$r_B = \frac{B}{4\pi n e} \ll a, \quad \text{так как} \quad v_e \sim \frac{cB}{4\pi n e a}.$$

Смысл введения такого термина, предлагаемого А.В. Гордеевым, весьма прост — как и обычный дебаевский радиус он определяет границу возможного нарушения квазинейтральности (только уже в так называемом сильнозамагниченном случае, см. лекцию 4) и буквенно совпадает с ним при подстановке обычного газокINETического давления nT_e вместо давления магнитного $B^2/(8\pi)$. Еще один вариант оценки применимости — $E \ll B$: фактически речь ведь в модели идет о дрейфе электронов в электрическом поле с $v_e \sim cE/B$. Все три простых неравенства нарушаются одновременно.

А вот для столь удачно использованной при выводе функциональной связи $P(n)$ здесь, в отличие от гидродинамики обычной жидкости, имеется мало оснований. Даже при заметной столкновительности плазмы ($\sigma \neq \infty$) в реальных случаях для электронов вследствие доминирования в их динамике силы Лоренца фактически работает гидродинамика без столкновений с $v_e \ll \omega_{Be}$ и $a \gg \rho_{Be}$ (см. первую лекцию). Поскольку в результате они находятся как бы не в ньютоновом динамическом, а в уже упомянутом дрейфовом «прецессирующем» движении, для адекватности гидродинамического представления о единой макроскопической частице, характеризующейся одной $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, нужна схожесть дрейфовых траекторий пребывающих в ней электронов. Если же их «прецессия» разводит реальные частицы в разные стороны, то использовать приближение сплошной среды можно лишь с большой осторожностью, и уж тем более в случае эволюционного прихода в данную точку флюида вследствие того же многообразия движения частиц из разных мест надежда на общую $P(n)$ эфемерна. В электрическом поле дрейф заряженных частиц обладает необходимым свойством универсальности

$$\mathbf{v}_d = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}$$

(ср. (1.9)), но давление, вызывающее, как известно, градиентный и центробежный дрейфы поперек \mathbf{B} , портит картину единения электронов, поскольку эти движения зависят от индивидуальных значений их поперечной и продольной энергий. Из желательности доминирования универсального механизма

$$\frac{j}{ne} \approx v_e \gg v_{Td} \sim v_{Te} \frac{\rho_{Be}}{a}$$

следует $P \ll B^2$ — модель хороша, когда тепловой разброс по скоростям, препятствующий течению «единой колонной», просто мал

вместе с газокинетическим давлением, влиянием которого на динамику тогда можно пренебречь.

Понятно, что при необходимости учета тепловых эффектов возникает потребность в дополнительном к (1.10) уравнении для P — следующем моменте слабостолкновительного кинуравнения. Это сильно усложняет описание системы, поскольку старшие моменты несут все более детальную информацию об отнюдь не универсальной форме f , и насильственный обрыв цепочки (см. лекцию 1) имеет все большие последствия для адекватности модели, так что и с данной точки зрения пренебрежение давлением предпочтительней.

Такова специфика долгожданного приближения *электронной магнитной гидродинамики*, базовый вариант которой заключается в уравнении формально даже не для электронов, а для магнитного поля (1.14) (см. начало лекции). Несмотря на наличие, казалось бы, многочисленных оговорок и ограничений, в действительности оно имеет очень надежный физический фундамент — уравнения Максвелла и силу Лоренца. Что бы и как бы не происходило внутри плазмы, можно гарантировать, что в любых процессах и эти уравнения будут справедливы, и электроны неизбежно окажутся под действием этой силы. Подобные соображения свидетельствуют о чрезвычайной надежности качественных предсказаний приближения ЭМГ — редкое свойство теоретических моделей такой капризной среды как плазма. Отказ от рассмотренных предположений (пренебрежение инерцией электронов, квазинейтральность, малость теплового давления) вполне возможен, а бывает и необходим. Отчасти он будет сделан и в этом курсе. Все они не затрагивают главной «моделеобразующей» характеристики ЭМГ: быстроты электронных движений, причем и здесь возможен самосогласованный учет медленной ионной эволюции.

Любопытен исторический аспект осознания универсальности и фундаментальности в замороженности ротора обобщенного импульса электронов в их динамике, ключевого момента в идеологии ЭМГ, приведшего и к переосмыслению взаимосвязи различных гидродинамик вообще. Родившаяся в начале XX в. МГД несколько десятилетий рассматривалась как нечто существенно отличное от почти на двести лет более старой обычной гидродинамики — ведь их уравнения замороженности в отличие от динамических не переводятся одно в другое ни в каком приближении. Все изменилось из-за решения насущных практических задач. Оказавшись на грани поражения во Второй мировой войне, Великобритания смогла противостоять германским подводкам и самолетам только вследствие изобретения и скорейшего внедрения мощных локаторов. Потребная мощность эта была столь велика, что на движение электронов в вакуумных лампах оказывали существенное воздействие их собственные электромагнитные поля.

Занявшись этой областью (согласно современной терминологии, заряженной плазмы), теоретики быстро обнаружили упомянутую при выводе (1.12) «блочную» конструкцию задачи. Окончательный прорыв в осознании вихревого единства природы на основе этого уравнения произошел в послевоенное время в начале пятидесятых трудами таких классиков физики как П. Дирак (P. Dirac) и О. Бунеман (O. Buneman).

В заключение данной лекции для ее встраивания в общие схемы лекции предыдущей желательно поговорить об иерархии интегралов движения системы в основном здесь базовом приближении ЭМГ. Энергия единицы объема среды в ней заключается в магнитном поле

$$\frac{B^2}{8\pi},$$

а вклады энергии электрического поля и движения электронов, регулярного (энергии кинетической) и хаотического (тепловой) малы. Доминирующий импульс представляет собой

$$-\frac{ne}{c} \mathbf{A}$$

и принадлежит частицам, хотя и называется полевым. Механическая же составляющая и импульс электромагнитного поля как такового могут быть опущены. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S}_E = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{4\pi} \approx \mathbf{v}_e \frac{B^2}{4\pi}$$

и соответствует (при доминировании эффекта Холла) сносу электронами «энтальпии» магнитного поля — суммы плотности энергии и давления (ср. замечание после вывода (1.5)).

И, наконец, стоит обсудить чрезвычайно сильную зависимость ЭМГ-эффектов от размерности системы. В силу принципиально вихревого характера движения электронов в таком приближении, не существует ни одного содержательного примера одномерного ЭМГ-течения (в отличие от МГД), для их реализации требуется как минимум двумерная геометрия. По-видимому, именно с этим обстоятельством связано то, что идеология идеологией, а первые истинно ЭМГ-задачи были решены только в шестидесятых годах прошлого века. Более того, 3-d режимы весьма отличны от 2-d по многим обстоятельствам. Можно упомянуть существенные препятствия сносу поля, дающего в двумерии лишь перестановку магнито-силовых трубок, налагаемые широм, наличие лишь трехмерных нетривиальных топологических конструкций типа заузленности и зацепленности силовых линий, а также принципиальную разность линейных волновых движений в трехмерных геликонах и двумерных дрейфовых колебаниях (см. в следующих лекциях). Многие вопросы, связанные с 3-d эволюций

в ЭМГ, до сих пор не имеют ответов и даже иногда плохо подвергаются формулировке.

В данных лекциях все внимание уделено стандартным двумерным геометриям рассматриваемых систем: плоской с

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{j} = \{j_x, j_y\}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$$

и цилиндрической (она же конфигурация z -пинча) с

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{j} = \{j_r, j_z\}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0.$$

Необходимо подчеркнуть их практическую значимость и естественность использованного условия однородности $(\mathbf{B}\nabla)n \equiv 0$ — ничем не сдерживаемые движения плазмы вдоль магнитного поля приводят к быстрому выравниванию концентрации плазмы по этому направлению. Конечно, бывают и более сложные ситуации, но задача этого курса — научить основам.

ЗАДАЧИ

1. Убедиться в справедливости (1.12) в релятивизме.

Решение. Единственная техническая проблема, встречающаяся при банальном повторении вывода, описанного в тексте, состоит в выделении из $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{p}$ потенциальной составляющей. Эту процедуру удобнее всего осуществить, обращая зависимость $\mathbf{p}(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{p} &\equiv \frac{c(\mathbf{p}\nabla)\mathbf{p}}{\sqrt{M^2c^2 + p^2}} = \frac{c(-[\mathbf{p}, \text{rot } \mathbf{p}] + \nabla p^2/2)}{\sqrt{M^2c^2 + p^2}} = \\ &= -[\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{p}] + \nabla \left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \end{aligned}$$

Видна универсальность ответа — выкладки, например, применимы для любой связи импульса и скорости движения вида $\mathbf{p} = f(v^2)\mathbf{v}$ с монотонной (только для удобства обращения) f . Это тоже говорит о фундаментальности закона.

2. Проверить указанное доминирование «полевых» слагаемых энергии и импульса в силу выписанных ранее неравенств.
3. В чем различие условий однородности плазмы вдоль магнитного поля в плоской и цилиндрической геометриях?

Решение. Все дело в специфике цилиндрической системы координат. В действительности в конфигурации z -пинча вдоль \mathbf{B} однородны физические, но не геометрические характеристики плазмы, поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r}.$$

Это обстоятельство важно для дальнейшего.

ЛЕКЦИЯ 3

Механическая подоплата вмороженности. Физические примеры, классические и квантовые. Двумерный случай: потоковая функция и скобка Пуассона. Бездиссипативная ЭМГ в двумерных геометриях: стационарные течения.

Фундаментальное сугубо гидродинамическое соотношение (1.12)

или

$$\frac{d}{dt} \int_{F_x} \text{rot } \mathbf{K} d\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \oint_{L_x} \mathbf{K} d\mathbf{l} = 0$$

все еще стоит особняком среди других законов сохранения текучих сплошных сред. Его ничего не стоит переписать в единообразном дивергентном виде

$$\frac{\partial \text{rot}_i \mathbf{K}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \text{rot}_i \mathbf{K} - v_i \text{rot}_j \mathbf{K}) = 0,$$

но это не отменит специфики. Пора разобраться, что же оно представляет собой по физике дела и из каких базовых свойств окружающего мира возникает — то, что упорно сохраняется при сильнейших модификациях уравнений Ньютона для жидких частиц, не может быть их простым следствием.

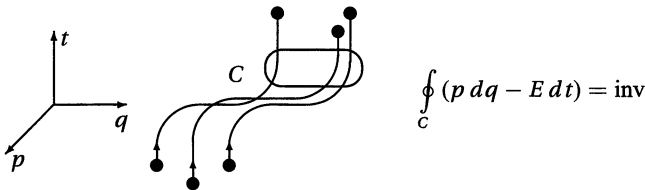


Рис. 1.3. Вмороженность в фазовом пространстве

Рассмотрим так называемую трубку траекторий независимых каких-либо механических систем в их расширенном фазовом пространстве. Фактически речь идет об эволюции одной и той же системы, поставленной в различные начальные условия. Законы механики утверждают, что интеграл действия по произвольным образом накинутому на эту трубку контуру C не зависит от формы и места расположения этого контура и потому является интегральным инвариантом, носящим имена Пуанкаре–Картана (рис. 1.3). (Здесь p и q представляют собой набор канонических импульсов и координат, а E — снова энергию системы, не обязательно сохраняющуюся.) По сути

изображенная на нем картина соответствует именно течению некой «жидкой» субстанции (из систем) в несколько своеобразном пространстве. Если проводить различные контуры в различных сечениях $t = \text{const}$, то в силу указанной инвариантности получается, что интеграл $\oint p dq$, называемый уже относительным интегральным инвариантом Пуанкаре, остается неизменным в процессе эволюции набора систем, т. е.

$$\frac{d}{dt} \oint p dq = 0,$$

что полностью совпадает с исконно гидродинамическим законом сохранения: просто этими несколько абстрактными механическими системами являются вполне конкретные жидкие частицы флюида. В небольшом разъяснении нуждается лишь требование «независимости» систем, поскольку отдельные макроскопические куски среды несомненно взаимодействуют между собой. Тут все дело в потенциальности сил взаимодействия, при которой влияние соседей сводится лишь к временным флуктуациям как бы внешнего силового поля, а зависимость $E(t)$, как подчеркивалось выше, отнюдь не препятствует инвариантности интеграла. Жидкие системы вполне независимы в требуем смысле слова.

Итак, наличие столь замечательного интеграла связано просто с механистичностью (гамильтоновостью) эволюции распределенных систем, откуда и следует его универсальность и первичность. Действительно, вопреки использованным ранее способам его вывода, он никак не связан с конкретным уравнением движения (вторым законом Ньютона) текучей среды, важна не какая-либо симметрия того или иного гамильтониана (видом которого можно даже не интересоваться), а всего лишь его существование!

Можно подойти и с другой стороны, проведя параллель с еще одним «высшим» по отношению к энергии и импульсу законом сохранения вещества. Его наличие проистекает из калибровочной симметрии системы: правильными каноническими ее переменными являются потенциалы скорости (так называемые переменные Клебша), а не она сама (например, в не всегда достаточном представлении $\mathbf{v} = -\nabla\phi + \lambda\nabla\mu$), и каков бы не был гамильтониан (лагранжиан), по физике дела он всегда инвариантен относительно сдвигов начала отсчета этих потенциалов. ϕ порождает уравнение непрерывности, а λ и μ — вмероженности.

Первичный язык вмероженности предоставляет возможность очень «дешево» и естественно получать весьма глобальные выводы. Например, просто использование выписанного выше контурного интеграла позволяет с легкостью переходить от классического к квантовому опи-

санию объектов. Из него, в частности, сразу следует необходимость квантования интенсивности вихрей, действительно наблюдающегося в сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях — ведь согласно Бору на любом охватывающем вихрь контуре должно укладываться целое число волн де Бройля реальных частиц среды

$$\oint \mathbf{K} d\mathbf{l} = 2\pi\hbar \cdot k = \int \text{rot } \mathbf{K} d\mathbf{f}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти общие соображения были высказаны Бунеманом раньше более конкретных вычислений Лондона (F. London) относительно квантования магнитного потока в сверхпроводниках (заключаемого именно в вихрях).

Приоритет (1.12) по отношению к динамическим уравнениям делает естественным наличие огромного физического разнообразия флюидов, описываемых уравнениями вмероженности: это не только обычные газо- и гидродинамика или газовая и твердотельная плазма, но и океаны и атмосферы планет, сверхпроводники, поля Янга–Миллса etc. Необходимо также еще раз подчеркнуть (ср. со схожей сентенцией относительно «операбельности» модели несжимаемой жидкости), что, несмотря на формальное описание уравнением вмероженности лишь роторной части уравнения движения, на самом деле на его базе изучается полная гидродинамическая задача. В действительности теория здесь работает со своеобразным «зарядовым» представлением течения — перерасчет поля $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ по распределениям его «источников» $\text{rot } \mathbf{K}$ и $\text{div } \mathbf{v}$ однозначен. Особенно удобен такой подход, если занимаемый источниками объем мал по сравнению с размерами всей области течения $V_{\text{источ}} \ll V_{\text{сист}}$. Ситуация аналогична исследованию динамики системы зарядов — достаточно интересоваться лишь их движением, не забывая себе голову полной системой уравнений Максвелла, поскольку действующее на частицы электрическое поле однозначно рассчитывается по конфигурации своих источников (см. задачи к данной лекции).

Имея дело с универсальным законом, стоит пока продолжить изучение (1.12) в общем виде, но в простейших геометриях, описанных в конце предыдущей лекции (в данной части подробно будут рассмотрены лишь они). В плоском варианте ротор векторного поля имеет только одну компоненту, перпендикулярную плоскости x,y , так что вмероженная величина представляет собой (псевдо)скаляр: $\text{rot } \mathbf{K} = P e_z$. Кроме плазмы такому варианту соответствуют, например, еще и вихревые циркуляции в земных атмосфере или океане, ежели их характерный масштаб (сотни километров у циклонов/антициклонов и синоптических вихрей) превышает толщину атмосферы (порядка 10 км) и глубину океана (в среднем менее 5 км), да и к другим

планетам (Юпитеру, Сатурну и пр.) сия теория весьма приложима. Любопытно, что вследствие эквивалентности механического воздействия сил Кориолиса и Лоренца, устанавливаемой теоремой Лармора ($\omega_{Be} \leftrightarrow 2\Omega_{\text{верт}}$), эти гидродинамики почти идентичны ЭМГ. В таком варианте (1.12) исходно приобретает «стандартный» дивергентный вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \text{div } \Pi \mathbf{v} = 0,$$

и вместо топологии (заузленности) трехмерного векторного поля, становящейся здесь до банальности тривиальной, теперь сохраняет гораздо большее (см. ниже). Все дело в ограничениях, накладываемых на эволюцию жидкого контура: в пространстве сохраняется лишь его замкнутость, не препятствующая всевозможным вытягиваниям, скручиваниям и складываниям, тогда как на плоскости он может меняться только вместе со своей площадью.

Вихревые течения различных субстанций достаточно часто (хотя и не всегда) оказываются несжимаемыми, т. е. $\text{div } \mathbf{v} \equiv 0$, что позволяет ввести в обиход вместо 2-d вектора скорости один опять-таки псевдоскаляр — потоковую функцию Ψ (она же — однокомпонентный вектор-потенциал течения) по формуле

$$\mathbf{v} = \text{rot } \Psi \mathbf{e}_z = [\nabla \Psi, \mathbf{e}_z] = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}$$

(иногда используют и другой знак), тождественно удовлетворяющую связи. Название этой величины объективно: поток флюида через произвольный разомкнутый контур на плоскости с фиксированными в точках 1 и 2 концами (т. е. по лежащей в плоскости нормали к нему)

$$\int_1^2 (\mathbf{v}, [d\mathbf{l}, \mathbf{e}_z]) = \int_1^2 \nabla \Psi d\mathbf{l} = \Psi(2) - \Psi(1)$$

определяется лишь граничными значениями Ψ и не зависит от его формы. В этом представлении снос течением приобретает наглядный геометрический образ движения вдоль линий уровня потоковой функции (перпендикулярно $\nabla \Psi$), поскольку линии тока суть линии ее уровня:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \rightarrow \quad \Psi = \text{const.}$$

В цилиндрической геометрии с $\text{rot } \mathbf{K} = \Pi \mathbf{e}_\phi$ наличествует выделенная ось, и в качестве аналога Ψ для подстановки, автоматически

удовлетворяющей связи $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, выбирают ток I по z , протекающий через круг радиуса r :

$$\mathbf{v} = \left\{ -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial z}, \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r} \right\}.$$

Вывести данное соотношение можно, рассмотрев причины, приводящие к изменениям $I(r, z)$. Например, увеличение тока при вариации r $\Delta I = \partial I / \partial r \cdot \Delta r$ проистекает из-за вклада дополнительного подтекания сквозь узкое колечко $v_z 2\pi r \Delta r$. Впрочем, можно по-прежнему использовать вектор-потенциал скорости $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \Psi \mathbf{e}_\varphi$ (при этом $\Psi = I / (2\pi r)$).

Плоская динамика Π вследствие вынесения скорости из-под дивергенции превращается в лагранжеву инвариантность $d\Pi/dt = 0$, что указывает на наличие бесконечного числа интегралов движения вида $\int_{F_*} g(\Pi) df = \text{const}$ (g — произвольная функция) — вот цена двумерной трансформации! Зато на потоковом языке уравнение вихревой эволюции имеет всего лишь первый порядок по пространственным производным, что чрезвычайно удобно для аналитического исследования:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \{ \Pi, \Psi \}_{x,y} = 0. \quad (1.15)$$

Цилиндрическая эволюция Π , хотя и не сводится ни к дивергентному уравнению сохранения, ни к лагранжевому сносу (вследствие чисто геометрической специфики, см. задачу 3 к предыдущей лекции), в токовом представлении все равно трансформируется в похожее

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \left\{ I, \frac{\Pi}{2\pi r} \right\}_{r,z} = 0 \quad (1.16)$$

со скобкой Пуассона в качестве блока пространственных производных. (1.15), (1.16) наглядно демонстрируют универсальность описания вихревой эволюции сплошных сред: вся физика сидит в связи двух псевдоскаляров Π и Ψ — «заряда» и «поля».

Замечательным примером универсальности является сам вид (1.15), совпадающий с бесстолконовительным кинетическим уравнением (1.8). Старшая по отношению к гидродинамике модель оказывается все той же гидродинамикой специфического флюида f в специфическом же фазовом пространстве. Изучение вихрей позволяет исследователям воочию увидеть эту, казалось бы, чистую и абстрактную выдумку теоретиков — что для вихрей фазовое пространство, для ученых — окружающий мир (см. задачу 2).

Получив общее представление, вернемся к частностям: бездиссипативной ЭМГ. Ее полем приложения является не только газовая, но и полупроводниковая плазма: вследствие малой концентрации носителей тока, в ней особенно силен эффект Холла, но только в случае доминирования одного из них — электронов либо дырок (тогда с другим знаком холловского члена в (1.9)), т. е. в несобственных полупроводниках. Зато в такой среде, где заряд носителей скомпенсирован решеткой (донорами, либо акцепторами), никакого ограничения на масштаб течения сверху не требуется: тяжелые заряженные частицы заведомо неподвижны, и в (1.13) можно положить $M_i \rightarrow \infty$.

В плоской геометрии и в однородной плазме здесь приходится столкнуться с вырождением относительно общей ситуации (1.15): оба псевдоскаляра оказываются одной и той же величиной — $\Pi = B$, $\Psi \propto B$. Действительно, именно вмороженное магнитное поле согласно уравнениям Максвелла является интегральной потоковой функцией для плотности тока:

$$nev_e = -\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} B \mathbf{e}_z = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{e}_z, \nabla B].$$

С точки зрения (1.14) (с $\sigma \rightarrow \infty$) или (1.9) вырожденность возникает по чисто геометрическим причинам: вследствие $(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} \equiv 0$ холловское электрическое поле является исключительно потенциальным — $\mathbf{E}_{\text{Холл}} \propto [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] = -\nabla B^2/2$. Скобка Пуассона двух одинаковых функций есть тождественный нуль, вихревая эволюция магнитного поля в такой системе отсутствует.

Ситуацию спасает неоднородность плазмы (вот она, роль ионов!), ведь скорость течения электронов пропорциональна плотности тока, но не равна ей, поэтому в нетривиальном варианте $n \neq \text{const}$ потоковая функция течения начинает отличаться от вмороженной величины: $\mathbf{E}_{\text{Холл}} \propto (\nabla B^2)/n$, и $\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{Холл}} \propto [\nabla 1/n, \nabla B^2]$ (с векторным аналогом скобки Пуассона — $[\nabla *, \nabla *]_z \equiv \{*, *\}_{x,y}$). В отличие от общего варианта (1.15) течение электронов в такой плазме является сжимаемым ($\operatorname{div}(\mathbf{j}/ne) \neq 0$), они постоянно подстраивают свою концентрацию к ионному фону (квазинейтральность), но за счет перераспределения коэффициентов между Ψ и Π , итоговое уравнение все равно содержит скобку Пуассона, хотя и становится нелинейным:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{c}{8\pi e} \left\{ B^2, \frac{1}{n} \right\}_{x,y} = 0. \quad (1.17)$$

В нем уже учтена связь между двумя псевдоскалярами (уравнение Максвелла), входящий в него истинный скаляр $n(x, y)$, играющий

роль, схожую с ролью Ψ , должен рассматриваться в качестве заданной функции.

В цилиндрической же геометрии z -пинча выкладки приводят к (ср. (1.16))

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{c}{8\pi e} \left\{ (Br)^2, \frac{1}{nr^2} \right\}_{r,z} = 0 \quad (1.18)$$

(здесь $(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} = -B^2\mathbf{e}_r/r$ и $\mathbf{E}_{\text{Холл}} \propto -[\nabla_{r,z}(Br)^2]/r^2$), причем $Br \propto I$ по закону Ампера. Естественно, (1.18) переходит в (1.17) при $r \rightarrow \infty$ и соответствующем переобозначении пространственных координат.

Можно заметить, что полученные эволюционные уравнения двумерной ЭМГ представляют изрядный вызов «здравому смыслу» — строго выведенные из представления о сносе B электронами по $-\mathbf{j}$, они формально (или формульно) описывают течение вдоль линий уровня n , вообще говоря, никак от этого тока не зависящих! Эту проблему предстоит прояснить в следующей лекции, пока же стоит сосредоточиться на простейших следствиях (1.17) или (1.18).

Обязанные своей нетривиальностью неоднородности параметров плазмы (даже если это и чисто геометрическая неоднородность r в nr^2), они тем самым по принятой терминологии описывают эффекты, относящиеся к разряду дрейфовых. В сильном внешнем магнитном поле ($B = B_0 + \tilde{B}$, $B_0 \gg \tilde{B}$), что особенно характерно для полупроводниковых задач, (1.17) может быть лианеризовано и использовано для вывода дисперсионного закона этих своеобразных дрейфовых волн

$$\omega = \frac{cB_0}{4\pi e} \left[\mathbf{k}, \nabla \frac{1}{n} \right]_z \quad (1.19)$$

(в квазиклассике с $k\nabla^{-1} \gg 1$), см. заключительную часть лекции 2.

Первые представления о специфике ЭМГ-эволюции в плазме дает стационарный вариант (1.17), (1.18), представляющий собой тождественный нуль соответствующей скобки Пуассона $\{*,*\} \equiv 0$ (естественно, «стационарно» все только из-за пренебрежения движением ионов). Обычно из этого обстоятельства делают вывод о зависимости входящих в нее функций, записывая решение в виде $B(n)$ либо $I(nr^2)$. С математической точки зрения это не вполне корректно, поскольку означенная зависимость совсем не обязательно является однозначной. Правильнее говорить о совпадении их линий уровня (или коллинеарности градиентов, видимой из векторного аналога скобки), значения же, например, B и n на этих линиях уровня могут не иметь между собой ничего общего. Это сильное ограничение свободы электронов, безусловно, связано с тем, что на двумерное течение наложены два условия: квазинейтральность и вмороженность. Действительно, если

выделить в электронной жидкости тонкую трубку линий \mathbf{B} (бесконечный цилиндр в плоской геометрии и тор в цилиндрической) площади $S \rightarrow 0$, то при ее сносе должны одновременно сохраняться число заключенных в ней электронов и захваченный поток магнитного поля, следовательно

$$\begin{cases} nS \vee nS2\pi r = \text{const} \\ BS = \text{const} \end{cases} \rightarrow \frac{B}{n} \vee \frac{Br}{nr^2} = \text{const}.$$

Таким образом, в плоскости xu бездиссипативный ток в рамках стационарной ЭМГ идет вдоль линий уровня n , электроны не могут сменить концентрацию. В данном варианте «здоровый смысл» восстанавливается в правах тем, что \mathbf{j} подстраивается под ионный фон n . Простейшее рассуждение (рис. 1.4) это подтверждает, поскольку протекая сквозь флуктуацию фона, электроны обязаны сжаться или расширяться, чтобы подстроить свое n , а значит и изменить увлекаемое B . Однако поле — интегральная характеристика тока и не может зависеть от малой группы частиц, попавших куда не следует, поэтому они просто обогнут δn . Итак, флуктуации концентрации плазмы представляют собой непреодолимые препятствия для идеального стационарного течения. Запрет снимается при освобождении от любого из двух ограничений — если электроны либо перестают сжиматься сами, либо не сжимают магнитное поле.

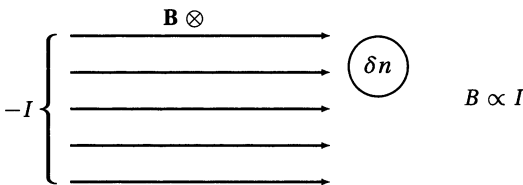


Рис. 1.4. Течение электронов на возмущенном фоне

В цилиндрической геометрии малая группа в определенных пределах может «навязать» свои желаяния основной массе, за счет изменения радиуса течения прижимая ее к оси или, наоборот, отдаляя от нее: поскольку здесь $B \propto I/r$, то при не слишком больших амплитудах δn протекание насквозь возможно, но с неизбежной рефракцией на препятствии. Из-за снятия вырождения здесь есть нетривиальные эффекты даже при $n = \text{const}$, например, в гофрированном цилиндре (z -пинче) ток течет подобно пронизывающему систему свету — исключительно вдоль линий $r = \text{const}$, не попадая в гофры (рис. 1.5). Это, кстати, один из первых ЭМГ-эффектов, предсказанный А. И. Морозовым и А. П. Шубиным как раз в 1960-х гг.

Таким образом, эффект Холла самым кардинальным образом сказывается уже на стационарном распределении тока (магнитного поля) в проводящей среде. Еще большие эффекты он приносит в нестационарные задачи. Однако до перехода к ним стоит задуматься о некоторых практических проявлениях разобранных явлений, а именно,

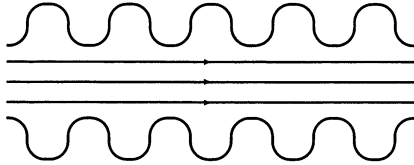


Рис. 1.5. Течение «на просвет»

что происходит в отсутствие просвета для идеального тока? Скажем, экспериментатор, собрав мощную батарею конденсаторов, сунет ее электроды в плазму и замкнет цепь. Неужели если в плазме не окажется линий уровня n или nr^2 , соединяющих электроды, то разряда не будет? Все-таки плазма относится к разряду проводящих сред, а не изоляторов. На самом деле здесь скрыто явление, обсуждению которого далее уделено особое внимание.

ЗАДАЧИ

1. При исследовании двумерной вихревой динамики различных флюидов в зарядовом представлении (иногда говорят о «представлении завихренности») восстановление поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ по $\Pi(\mathbf{r}, t)$ проводят с помощью функции Грина уравнения, связывающего два скаляра и «сортирующего» тем самым вихри (гидродинамики) по физике дела

$$\Pi = L(\Psi) \quad \rightarrow \quad \Psi(\mathbf{r}) = \int \Pi(\mathbf{r}') \underbrace{\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}_{\text{ФГ}} d^2 \mathbf{r}'$$

(для идеальной жидкости, например, $L \propto -\Delta$ и $\psi \propto -\ln r$). Как выражаются через нее интегралы движения исходной системы — энергия, импульс и момент импульса (на единицу длины вдоль z)?

Решение. Воспользовавшись стандартным выражением этих интегралов через обобщенный импульс жидких частиц и их концентрацию, можно записать

$$\begin{aligned} E &= \frac{n}{2} \int (\mathbf{K}, \mathbf{v}) d^2 \mathbf{r} = \frac{n}{2} \int \Pi \Psi d^2 \mathbf{r} = \frac{n}{2} \iint \Pi(\mathbf{r}) \Pi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}', \\ \mathbf{P} &= n \int \mathbf{K} d^2 \mathbf{r} = n \int \Pi [\mathbf{e}_z, \mathbf{r}] d^2 \mathbf{r}, \\ \mathbf{M} &= n \int [\mathbf{r}, \mathbf{K}] d^2 \mathbf{r} = \frac{n}{2} \mathbf{e}_z \int \Pi r^2 d^2 \mathbf{r} \end{aligned}$$

(при условии сходимости соответствующих интегралов на бесконечности, т. е. речь идет о своеобразной перенормировке сохраняющихся величин). Полезно убедиться, что уравнение (1.15) действительно их сохраняет (естественно, в силу нетеревых симметрий).

2. Предельным вариантом малости места, занимаемого источниками, является система так называемых точечных вихрей с $\Pi = \sum_i \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Согласно (1.15) при эволюции их интенсивности («заряды») Γ_i остаются неизменными, и взаимодействие сказывается лишь во взаимном сносе течениями, продуцируемыми соседями: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ (именно эти заряды и квантуются по Бору, так как $\oint \mathbf{K} d\mathbf{l}$ по любому охватывающему вихрь контуру равен как раз Γ). Выписать соответствующие динамические уравнения и исследовать их связь с интегралом энергии из первой задачи.

Решение. Особенное удобство здесь заключается в том, что эволюция таких предельно локализованных объектов описывается уравнениями в обыкновенных, а не частных производных, которые можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \Gamma_j [\nabla \psi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \mathbf{e}_z] \rightarrow \begin{cases} \Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}, \quad H = \sum_{j > k} \Gamma_j \Gamma_k \psi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$$

(что подтверждает связь замороженности с гамильтоновостью как таковой), где H представляет собой энергию из первой задачи, перенормированную за счет вычета собственной (внутренней) энергии каждого вихря по отдельности. Ситуация аналогична механике обычных заряженных частиц — их взаимное движение определяется именно взаимодействием. В вихревой динамике, правда, роль канонического импульса играет одна из координат (т. е. фазовое пространство системы вихрей действительно совпадает с конфигурационным: взаимное положение частиц задает скорость, а не ускорение, их механика по терминологии В. В. Козлова является картезианской, а не ньютоновой), и сам гамильтониан отнюдь не сводится к простой сумме кинетической и потенциальной энергий — в изотропном варианте $\psi = \psi(\sqrt{x^2 + y^2})$ (т. е. система ненатуральна).

3. Нет ли противоречия в том, что в (1.17), (1.18) роль псевдоскаляра — потоковой функции играют как бы истинные скалярные величины n и $n r^2$?

ЛЕКЦИЯ 4

Динамика магнитного поля в среде с обычным законом Ома. Нестационарный снос в ЭМГ, определяющие параметры и роль диссипации. Задача о скине: точные решения и простые аналогии. Вектор Пойнтинга и общий баланс энергии. Зависимость от геометрии — тонкие пленки.

Пора присмотреться к системе уравнений (вкупе с основным ограничением) базового приближения ЭМГ

$$\mathbf{E} = \frac{1}{nec} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \quad \left(\frac{c}{\omega_{pe}} \ll a \ll \frac{c}{\omega_{pi}} \right),$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

более внимательно. Поскольку обобщенный закон Ома содержит два слагаемых, то существует безразмерный физический параметр, отвечающий за иерархию описываемых ими процессов. Грубо и формально его можно оценить, просто поделив холловское и диссипативное поля друг на друга, оперируя с ними как со скалярными величинами (см. ниже). Результат носит название холловского параметра или замагниченности: $\beta = B\sigma/(nec) \equiv \omega_{Be}\tau_e$. Конечно, здесь наиболее интересен случай доминирования эффекта Холла $\beta \gg 1$ (но и диссипацией при этом окажется пренебрегать не след). Тем не менее, начать стоит с воспоминания о противоположном случае — привычном для общей физики приближении простого проводника с $\beta = 0$, каковым (без особого на то основания) часто считают плазму.

Динамика поля в среде со столь примитивным материальным уравнением описывается классическим уравнением диффузии, правда, для векторной величины

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}.$$

В основной для дальнейшего плоской геометрии, представленной на рис. 1.6, эволюция приобретает скалярный вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad \left(D = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} \propto -\nabla B, \quad (1.20)$$

имея характер необратимого (диссипация!) переливания субстанции B от более насыщенных ею слоев к менее. Любопытно, что роль направленного по x субстанционального потока q_x здесь играет пер-

пендикулярное этому направлению электрическое поле E_y — исходная векторность уравнений чувствуется и в чисто одномерном пределе.



Рис. 1.6. Геометрия скиновых задач

Свойства диффузионной динамики четко вычлняются на базе двух стандартных матфизических задач — начальной и граничной. В начальной речь идет об эволюции в безграничной среде заданного при $t = 0$ профиля $B_0(x)$, имеющего вид произвольной «шапочки» с $B|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ (рис. 1.7). В процессе эволюции происходит неограниченное расплывание начального профиля с уменьшением его амплитуды, так что поток магнитного поля Φ (не путать с q) в плазме сохраняется (полезна проверка этого обстоятельства с помощью (1.20)). Все многообразие деталей B_0 при этом теряется — диффузия представляет собой классический пример стохастического процесса «с забыванием» (ростом энтропии), выполаживание все сводит к универсальному автомодельному ($B \xrightarrow{t \rightarrow \infty} f(x/\sqrt{Dt})/\sqrt{t}$) гауссову профилю.

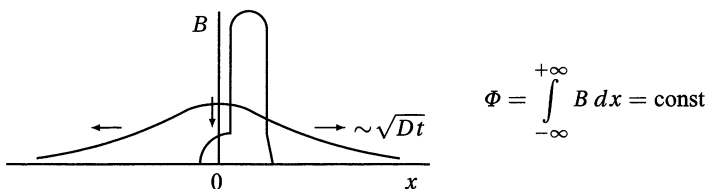


Рис. 1.7. Диффузионное расплывание профиля

В граничной задаче речь идет о заполнении диффундирующей субстанции первоначально (при $t = 0$) свободного от него полупространства. Для магнитного поля это соответствует его (и тока) проникновению в плазму и называется скиновой задачей (см. рис. 1.6). На границе среды (плазмы) задаются значения либо самой $B|_{x=0}$ (фактически тока, текущего по плазме — в начальный момент по границе), либо ее производной $\partial B / \partial x|_{x=0}$ или $q|_{x=0}$ (электрического поля, приложенного к плазме), в принципе как произвольные функции времени, но в классическом варианте как постоянные. Возникающие профили, выражающиеся через интегралы от гауссовой функ-

ции, представлены на рис. 1.8. В обоих вариантах проникновение поля (заполнение субстанции) происходит по корневому закону, но в первом случае профиль становится все более пологим (его ширина растет, а амплитуда — нет), и поток через границу (производная B или значение E) убывает согласованным образом, обеспечивая закон сохранения (см. (1.20))

$$\Phi = \int_0^{\infty} B dx = \int_0^t q|_{x=0} dt \propto \sqrt{t} \quad \rightarrow \quad q|_{x=0} \propto \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Он, однако, все время остается ненулевым (отклонение профиля $B(x)$ при $x = 0$ от горизонтали асимптотически мало, но существенно). Во втором из-за необходимости сохранения граничной производной амплитуда растет, и заключенный в плазме магнитный поток Φ увеличивается линейно ($\propto t$ — снова согласованно с $q|_{x=0} = \text{const}$).

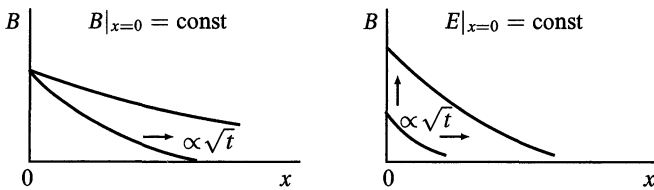


Рис. 1.8. Профили поля в граничной задаче

Полезно, в том числе и для дальнейшего, рассмотреть и энергетические потоки в такой скинковой задаче, для определенности в первом варианте. Вектор Пойнтинга в вакууме (электрическое и магнитные поля здесь совпадают со своими значениями на границе плазмы, к которой они тангенциальны) обеспечивает подвод энергии по оси x из минус бесконечности (на самом деле от генератора, создавшего заполняющее левое полупространство B). Входя в плазму, энергетический поток расходуется на повышение ее магнитной энергии и джоулев нагрев (см. задачу 4 к первой лекции), причем из указанных скейлингов следует простое соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dx \sim \int_0^{\infty} \frac{j^2}{\sigma} dx,$$

т. е. КПД заполнения плазмы полем $\sim 50\%$ (грубо). Обе составляющие затрат убывают пропорционально $1/\sqrt{t}$ вместе с балансирующим их вектором Пойнтинга (этот — за счет E), таким образом плазма в качестве обычного проводника из-за внутренней перестройки вносимых в нее полей по мере наполнения все хуже и хуже их воспринимает.

Во всех представленных вариантах видно единое свойство: если $\sigma \rightarrow \infty$ ($D \rightarrow 0$), то $\partial/\partial t \rightarrow 0$, т. е. в хорошем проводнике эволюция B происходит крайне медленно, в частности, оно очень плохо туда проникает. Почти все из сказанного выше следует уже из простой оценки для характерного масштаба по x в рамках (1.20): $l_x^2 \propto t$. В заключение разбора примитивной модели проводящей среды можно привести решение стандартной скиновой задачи (слегка отличающейся от стандартной граничной для общего уравнения диффузии) — в ней на границу подают гармоническое переменное магнитное поле $B|_{x=0} = B_0 \cos \omega t$ и рассматривают установившееся состояние:

$$B = B_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x\right).$$

И здесь ясно видна экспоненциальная экранировка внутренних слоев.

Вернемся к полной задаче с $\beta \neq 0$ о плазме как холловской среде. В геометрии рис. 1.6 магнитное поле в ней эволюционирует согласно уравнению (ср. (1.17))

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{c}{8\pi e} \left\{ B^2, \frac{1}{n} \right\}_{x,y} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta B.$$

Если градиент поля направлен главным образом по x (ток в основном течет по y , как это и изображено на рисунке), т. е. характерные пространственные масштабы изменения B выстроены в иерархии $l_y \gg l_x$, то отсюда следует

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \kappa B \frac{\partial B}{\partial x} = D \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad \left(\kappa = \frac{c}{4\pi e} \frac{\partial 1}{\partial y n} \right), \quad (1.21)$$

что в случае неоднородности плазмы по y , когда включается конвекция магнитного поля по линиям уровня n — т. е. вдоль $y = \text{const}$, — качественно отличается от (1.20). Из-за сильного неравенства характерных размеров в первом приближении в нем можно положить $\kappa = \text{const}$ (неоднородность по y уже сыграла свою роль, породив новый эффект) и $B = B(x, t)$. Последнее означает пренебрежение «перекосом» фронта магнитного поля (тока) — естественно, такое приближение адекватно лишь при не слишком больших смещениях этого фронта (сопоставимых с пространственным масштабом неоднородности концентрации l_y), поскольку иначе неизбежно возникает заметное j_x — если только $n \not\propto 1/y$, см. лекцию 6.

Несмотря на исключительно одномерный вид (1.21), в таком режиме «векторное наследие» сохраняется в нем гораздо сильнее, чем в (1.20), ситуация в действительности является *псевдоодномерной* (ср. с сентенцией о принципиальной одномерности ЭМГ во второй

лекции). Одно из проявлений этого можно увидеть сразу — истинная иерархия замороженности и диффузии согласно (1.21) определяется параметром $\beta \cdot l_x/l_y$: поскольку холловское и диссипативное электрические поля взаимно перпендикулярны, то и производные от них при применении ротора берутся по ортогональным друг к другу направлениям, поэтому теперь при дивергентной форме записи (1.21) две составляющие потока q_x различаются и по физике (снос и диффузия), и по геометрии (E_x и E_y). Другие менее заметны, но не менее важны.

Что происходит в рамках нового эволюционного уравнения при пренебрежимо малой диссипации $\beta \rightarrow \infty$ (ведь проводимость горячей плазмы обычно очень велика)? В системе присутствует выделенное направление сноса (в зависимости от знаков B и градиента n), т. е. в ней может бежать гиротропная дрейфовая волна, в линейном случае в большом внешнем поле (см. предыдущую лекцию) описываемая формулой $\vec{B} = \vec{B}(x - \kappa B_0 t)$. Скорость сноса, естественно, совпадает с групповой скоростью $d\omega/dk$ из (1.19). Особенно характерна эта ситуация для плазмы полупроводников, очень часто оказывающейся во внешнем поле (обычно для пренебрежения диссипацией в смысле $\beta \gg 1$ в них достаточно, чтобы $B_0 \gg 1$ кГс — с учетом того, что масса электронов здесь $\sim 0,1 \div 0,01 m$).

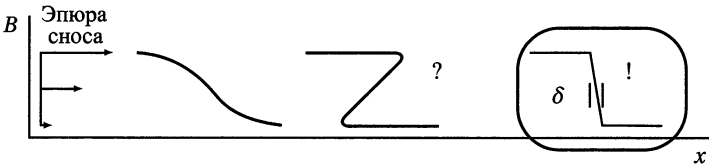


Рис. 1.9. Опрокидывание профиля нелинейной волны

В обычном для газовой плазмы нелинейном варианте (попытка его создания в полупроводнике быстро переводит того в аналогичное состояние) скорость конвекции поля начинает зависеть от локального значения B , разные участки его профиля движутся по своим, локальным же законам, «не чувствуя» друг друга — очень быстро вблизи максимума и практически оставаясь на месте при $B \rightarrow 0$, что неизбежно приводит к кардинальным искажениям формы $B(x)$ (рис. 1.9). Будучи предоставленной самой себе, такая эволюция неизбежно вызовет «перехлест» профиля с формированием физически и математически бессмысленной неоднозначной зависимости $B(x)$. На самом же деле, сколь малой не была бы исходно роль диссипации, с укручением волны (уменьшением l_x) она неизбежно возрастает и на толщинах фронта $l_x \sim l_y/\beta$ — вспомним иерархию — останавливает рост производной $\partial B/\partial x$. Опрокидывание стабилизируется, и фронт

нелинейной волны, оставаясь узким, начинает двигаться совместно и согласованно: соседние участки «почувствовали» друг друга через диффузию, более быстрые притормозили, более медленные — ускорились. Если вернуться к старому обозначению внешнего геометрического масштаба задачи a (в данном случае — неоднородности ионного фона), то можно сказать, что в ней рождается собственный, гораздо меньший размер $\delta \sim a/\beta$, обеспечивающий сравнимый вклад в эволюцию диффузии и конвекции. В этом и заключается важная и в чем-то даже ключевая роль малой диссипации, на которую намекалось в начале лекции. Вообще, генерация «внутренних» малых масштабов является характернейшим атрибутом ЭМГ-эволюции, сквозной нитью проходящим через данную часть.

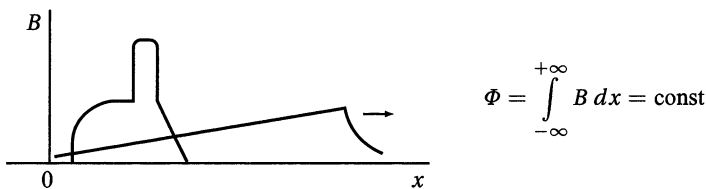


Рис. 1.10. Треугольная волна

Итак, необходимо сопоставить эволюцию магнитного поля в рамках полного уравнения (1.21) с конечным, хотя и большим β , с разобранной чисто диффузионной. В начальной задаче «шапочка» B , будучи подхваченной конвекцией (для определенности — в положительном направлении оси x), искажает свою форму: левый склон выполаживается, правый же укучается вплоть до включения диффузии и описанного единого движения. Формируется так называемая «треугольная волна» (рис. 1.10). Учитывая сохранение Φ (снова полезное упражнение), практическую неподвижность (в меру малости D) левого края и движение крутого правого со скоростью, пропорциональной его амплитуде, можно найти законы изменения параметров установившегося режима — длины и высоты треугольника:

$$B_{\max} l_x = \text{const} \sim \Phi_0, \quad \dot{l}_x \sim \kappa B_{\max} \rightarrow l_x \sim \sqrt{\kappa \Phi_0 t}.$$

По-прежнему происходит универсализация профиля (без диссипации этого бы не было), но асимметричного, и справедлив корневой эволюционный скейлинг, но гораздо более быстрый. Границей перехода между режимами действительно является параметр $\beta l_x / l_y$, в данном варианте могущий быть записанным как $\Phi \kappa / D$.

При проникновении же через границу постоянного поля B_0 сначала в любом случае доминирует старая диффузия (l_x мало), а вот

затем, когда в игру вступает эффект Холла, в зависимости от знака $\kappa B \propto (\mathbf{v}_e, \nabla n)$ (направления изменения n в течении электронов) возможны два варианта. Либо, если электроны, или, в общем случае, носители тока уменьшают свою концентрацию при движении вдоль границы среды, возникает эффект запираия, когда конвекция стремится вынести магнитное поле из плазмы и в ее противоборстве с диффузией устанавливается стационар с гиперболическим профилем

$$-\kappa B \frac{dB}{dx} = D \frac{d^2 B}{dx^2} \quad B|_{0, \infty} = B_{0,0} \quad B = \frac{B_0}{1 - \frac{\kappa B_0}{2D} x} \quad (1.22)$$

(с учетом граничных условий и требования $\kappa B_0 < 0$). Либо, в противоположном случае нарастания концентрации электронов в течении, включается мощный конвективный внос B в плазму, подхватывающий поле и транслирующий его вглубь с постоянной скоростью, формируя (после «коллективизации» профиля диффузией) волну с крутым передним фронтом и профилем в виде th:

$$-u \frac{dB}{dx} + \kappa B \frac{dB}{dx} = D \frac{d^2 B}{dx^2} \quad B|_{\mp \infty} = B_{0,0} \\ B|_{\mp \infty} = B_{0,0} \quad B = \frac{B_0}{\exp \left[\frac{\kappa B_0}{2D} \left(x - \frac{\kappa B_0}{2} t + \text{const} \right) \right] + 1} \quad (1.23)$$

(с учетом несколько других ГУ, определяющих и u , которая оказывается ровно вдвое меньше, чем идеальная скорость сноса при максимуме профиля B_0), см. рис. 1.9.

В обоих вариантах возникает обещанный и пресловутый малый масштаб как следствие баланса двух членов в обобщенном законе Ома (точнее, в его роторе). Кардинальным отличием от модели примитивного проводника является отсутствие фатальности в зависимости скорости эволюции B от величины σ : возможно очень быстрое проникновение поля в хороший (в смысле обычной проводимости) проводник и непроникновение в плохой. В классическом скин-эффекте происходит обнаруженное Я. Л. Калдой и А. С. Кингсепом замечательное детектирование знакопеременного поля — гиротропная (а может, даже хиральная) плазма в зависимости от знака κ выделяет одно из направлений B , пропуская через себя поле этого знака с постоянной скоростью (с почти неизменной амплитудой при $\beta \rightarrow \infty$) и усиленно запирая у границы поле другого знака.

Содержащее все эти эффекты уравнение (1.21) носит название *уравнения Бюргерса*. Это простейшее уравнение, описывающее диссипативную стабилизацию нелинейного опрокидывания и универ-

сально используемое в таких разных областях физики как ударные волны, бора на поверхности жидкости, просачивание через пористые среды (в том числе, хроматография) etc. Его замечательное для теоретиков свойство заключается в так называемой «скрытнолинейности» (термин В. В. Янькова): существует замена зависимого переменного (так называемая *подстановка Коула–Хонфа*), сводящая его к линейному уравнению диффузии и делающая доступным предельно полное аналитическое изучение всех разобранных здесь задач (и не только их) — см. задачу 1. Это обстоятельство придает уравнению особую славу и знаменитость.

Строгие выкладки безусловно являются идеальным средством описания эффектов, но для декларированного во Введении ознакомительного подхода хотелось бы иметь и простую качественную модель нового (относительно свойств обычной проводящей среды) объекта — волны трансляции поля (1.23). Для адекватности такая модель должна явно учитывать скрытую двумерность задачи (смещение фронта в одном направлении за счет сноса поля электронами по другому, ортогональному ему, см. выше, в том числе и предыдущую лекцию) и принципиальную неидеальность ЭМГ-течения проводящей жидкости. Несмотря на условность всех аналогий, удачным инструментом для качественного анализа представляется аналогия «дырявых мешков с песком»: выстроенные в шеренгу вдоль дороги люди, имеющие за плечами заполненные песком мешки, в которых проделаны дырки, начинают последовательно один за другим перебегать тракт, двигаясь перпендикулярно ему, в то время как граница рассыпаемого песка движется вдоль него. Действительно, если ток на фронте поля (бегущие в данный момент мешочники) переносит электроны в область повышения их концентрации, то они вынуждены сжиматься. Чтобы избавиться от непосильного закона вмороженности (как было показано в прошлой лекции, удовлетворить ему невозможно), они рождают малый токовый масштаб (сжимают не только себя, но и ток), наращивая диссипацию (проделывая в мешках дырки), и перестают тащить с собой B , сбрасывая излишек по дороге.

В принципе, как и указывалось ранее, можно избавляться от любого из двух законов сохранения. Дело, однако, в том, что нарушить навязывающую сжатие (или разрежение) квазинейтральность при нерелятивистизме течения нельзя: согласно максвелловским уравнениям при сильном отклонении n от zn_i электрическое поле будет огромным

$$B \sim \frac{neav_e}{c}, \quad E \sim nea, \quad \rightarrow \quad E^2 \sim B^2 \left(\frac{c}{v_e} \right)^2,$$

и исходной магнитной энергии плазмы просто не хватит. В таком варианте электронам приходится преодолевать именно вмороженность —

отсюда и проистекает пресловутый баланс слагаемых в обобщенном законе Ома.

Разбор специфики ЭМГ-эволюции стоит завершить физическим анализом скрытой двумерности (1.21) и перпендикулярности движения поля течению электронов. В чем особенность энергетического баланса при просачивании поля в холловскую среду? Тангенциальное и нормальное (в отличие от первого не обязанное быть непрерывным при переходе к вакууму) к границе плазмы электрические поля порождают две составляющие вектора Пойнтинга, переносящие энергию по двум ортогональным направлениям. В волне трансляции \mathbf{j} и \mathbf{E} за пределами фронта экспоненциально малы, и необходимое для заполнения среды (да и джоулева нагрева) B^2 поставляется именно холловской составляющей $\mathbf{S}_E = \mathbf{v}_e B^2 / (4\pi)$, параллельной границе, т.е. вместе с электронами из неведомых для одномерии $y = -\infty$ или $y = +\infty$. А если тамошний неизвестный источник не нагрузит их требуемой энергией, что будет со строго (без всяких источников) выведенным (1.21)? С другой стороны, куда девается магнитная энергия из области запираия, которая здесь уже уносится на бесконечность? Прояснить ситуацию может пример с плазмой, занимающей не полупространство, а ограниченный в плоскости xu «брус», изображенный на рис. 1.11. В таком варианте циркулирующие

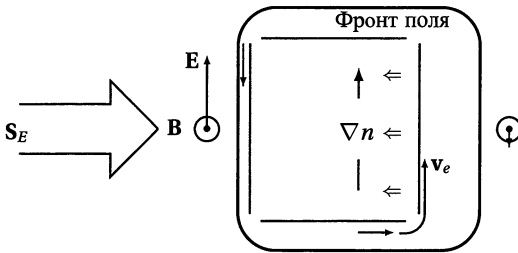


Рис. 1.11. Проникновение поля в ограниченный объем (площадь)

вдоль границ плазмы токовые электроны уже не могут монотонно менять свою концентрацию (поле ∇n потенциально), и неизбежно последовательно попадают из области запираия (в данном случае — слева) в область трансляции поля (справа) и обратно. В промежуточных областях (сверху и снизу) они движутся вдоль линий $n = \text{const}$, и происходит простая диффузия B . Тангенциальные (диссипативные) приграничные составляющие \mathbf{E} в этих областях совершенно различны. Слева она очень велика (вместе с \mathbf{j}) и постоянна во времени (вплоть до полного заполнения бруса магнитным полем) вследствие стационарности состояния, что обеспечивает огромный, неубываю-

щий во времени подток энергии вектором Пойнтинга от дальнего источника. На джоулев нагрев здесь расходуется лишь часть этой энергии, а остальная подхватывается холловской составляющей и транслируется через диффузионный участок в область конвективного вноса, где и тратится на насыщение плазмы полем, после чего электроны возвращаются налево за новой порцией B (энергии) — здесь они уменьшают свое n и нуждаются уже в «подборе» поля по дороге для компенсации его убывания при расширении. Поток энергии справа ничтожен и не существует в балансе.

Таким образом, на самом деле трансляция и запираение B действуют совместно и согласованно. Неоднородная холловская среда перестраивает вносимые в нее поля для их лучшего восприятия, но действует по принципу разделения труда. Одни участки играют роль «насоса», эффективно отбирающего энергию от внешнего генератора, другие выполняют работу по «освоению» этой энергии. Раздельное их существование невозможно (в реальной ситуации из-за ограниченности размеров плазмы в рамках (1.21) где-то по y обязательно нарушится постоянство знака $(\mathbf{v}_e, \nabla n)$ — либо у границы плазмы, либо на поставляющем ток электроде). Пропорциональный времени рост энергии магнитного поля в волне трансляции может быть обеспечен только стационаром области запираения.

Резюмируя обсуждение отличительных свойств ЭМГ-эволюции в данной лекции, необходимо еще раз подчеркнуть две ее характернейшие особенности: в исходно «одномасштабной» задаче рождаются токовые слои малой толщины $\delta \ll a$, и происходящая в них диссипация магнитной энергии велика сколь ни мало обратное проводимости удельное сопротивление среды — вследствие баланса членов в законе Ома она составляет $O(1)$. Ток может хорошо проникать вглубь плазмы, но не желает равномерно заполнять объем.

И, наконец, для полноты картины стоит кратко остановиться на специфике сильнейшей зависимости ЭМГ-эффектов от геометрии. До сих пор (и далее тоже) «плоская» эволюция рассматривалась для бесконечной вдоль z плазмы. Другим предельным вариантом может быть, наоборот, бесконечно тонкая среда в виде пленки (рис. 1.12). Такие старые объемные ЭМГ-характеристики течения как концентрация электронов, проводимость и плотность тока превращаются здесь в поверхностные, и у магнитного поля появляются две составляющие, но только перпендикулярное пленке B_z заморожено в $-J(\beta l_x/l_y)$ может быть по-прежнему велико, а $\beta d/l_y$ всегда мало). Причины, порождающие попытку сжатия тока в случае $N = N(y)$, остаются в силе. Однако теперь по закону Ампера $B_z \sim I/(cl_x)$, и параметр иерархичности $\beta l_x/l_y$ является интегралом задачи: сжатие увеличивает диссипацию,

но в той же мере возрастает эффект Холла. В результате бессмысленной погони за призраком стабилизации получается эффект взрывной контракции тока (за конечное время вплоть до $l_x \sim d$).

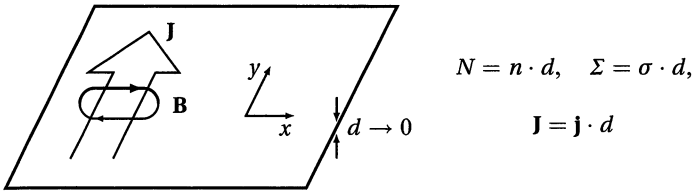


Рис. 1.12. Эффект Холла в тонкой пленке

Математика здесь отчасти напоминает старое (1.21) с заменой $B \rightarrow B_z|_{z=0}$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{JB_z}{e} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{N} - \frac{c}{\Sigma} \frac{\partial J}{\partial x}, \quad (1.24)$$

но вместо локального соотношения $j = -c/(4\pi) \cdot \partial B/\partial x$ ток и поле оказываются связанными между собой интегрально:

$$B_z(x) = \frac{2}{c} \mathcal{P} \int \frac{J(x')}{x' - x} dx' \quad \rightarrow \quad J(x) = \frac{c}{4\pi^2} \mathcal{P} \int \frac{B_z(x')}{x - x'} dx'. \quad (1.25)$$

Любопытно, что и эти ЭМГ-уравнения, несмотря на свою интегродифференциальность, как и уравнение Бюргера допускают возможность полного интегрирования, но на совершенно других принципах (см. задачи 2 и 3). Впрочем, это лежит несколько в стороне от основного изложения.

ЗАДАЧИ

1. Проверить, что подстановка $B = -2D/\kappa \cdot \partial \ln \varphi / \partial x$ действительно сводит уравнение Бюргера (1.21) к линейному уравнению диффузии.

Решение. Стандартно эту подстановку осуществляют в три этапа. Сначала полагают, что $B = -\partial \phi / \partial x$:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -D \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \xrightarrow{f \text{ ax}} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + f(t),$$

где f — произвольная функция времени. Затем, используя $\phi = 2D/\kappa \cdot \ln \varphi$, избавляются от нелинейности

$$\frac{\varphi'_t}{\varphi} - D \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi} \right)^2 = D \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi} \right)'_x + f(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(t) \varphi$$

и, наконец, с помощью преобразования $\varphi \rightarrow \varphi \exp(\int f dt)$, не меняющего физической величины B , оставляют лишь обычный диффузионный опе-

ратор. Необходимость «тащить» функцию f до конца связана с тем, что в противном случае теряется взаимнооднозначность B и φ (это обстоятельство часто опускается из вида): тогда любое решение диффузионного уравнения для φ с $f = 0$ является одновременно и решением уравнения Бюргерса, но, вообще говоря, не наоборот. Полезно иметь в виду, что замена Коула–Хопфа подходит и для многомерных векторных обобщений уравнения Бюргерса (используемых, скажем для описания слабых ударных волн в обычной гидродинамике или в гидродинамике мелкой воды)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \kappa(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = D \Delta \mathbf{v}$$

в случае потенциальности соответствующего $\mathbf{v} = -\nabla\phi$.

2. Обратить зависимость между B_z и J (закон Ампера) в (1.25).

Решение. Для придания формулам симметрии и последующего использования, удобно перейти от поверхностной плотности тока к тангенциальной составляющей магнитного поля B_x по формуле $B_x|_{z=+0} = 2\pi J/c$. Тогда

$$B_z = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{B_x(x')}{x-x'} dx'.$$

Обращение интегрального оператора можно произвести с помощью преобразования Фурье, переводящего свертку функций в произведение их образов:

$$\begin{aligned} B_{zk} = -\frac{1}{\pi} \left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right]_k B_{xk} &\rightarrow B_{xk} = -\pi \left(\left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right]_k \right)^{-1} B_{zk} \rightarrow \\ &\rightarrow B_x = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{B_z(x')}{x-x'} dx', \end{aligned}$$

поскольку

$$\left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right]_k \equiv \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-ikx)}{x} dx = -2i \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = -i\pi \operatorname{sign} k.$$

Свертка функций с $\mathcal{P}1/x$ называется также преобразованием Гильберта и обозначается $\hat{H}_x[*]$.

3. Преобразование Гильберта $\hat{H}_\omega[*]$ встречается в дисперсионных соотношениях Крамерса–Кронига, где связывает действительную и мнимую части аналитической в верхней полуплоскости (в силу принципа причинности) диэлектрической проницаемости среды на действительной оси частот: при $\Im\omega = 0$ имеем $\Re\epsilon = \hat{H}_\omega[\Im\epsilon]$, $\Im\epsilon = -\hat{H}_\omega[\Re\epsilon]$. Это наводит на мысль рассмотреть (1.24) как «проекцию» на действительную ось в комплексной плоскости $\zeta = x + iz$ некоторого уравнения для голоморфной при $\Im\zeta \geq 0$ функции $w = B_z + iB_x$. Как выглядит это уравнение? (К. В. Чукбар).

Решение. Исходно справедливое при $\Im\zeta = 0$ ($z = +0$ в физическом пространстве) соотношение (в безразмерном виде)

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 2B_z \hat{H}_x[B_z] - \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_x[B_z]$$

является мнимой частью относящегося уже к $\Im\zeta \geq 0$ уравнения

$$i \frac{\partial w}{\partial t} = w^2 - \frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

и, стало быть, может быть полностью проинтегрировано:

$$\frac{1}{w(\zeta + it, t)} = \frac{1}{w_0} + it.$$

Указанной взрывной контракции тока соответствует выход на действительную ось особой точки (полюса) w_0 , первоначально расположенной при $\Im\zeta < 0$. Собственно, именно точки неголоморфности комплексной функции в нижней полуплоскости (вместо токов в пленке) в данном формализме и являются источниками поля. Любопытно, что «вынос» описывающего динамику магнитного поля в пленке уравнения в окружающее комплексное пространство означает приписывание пустоте свойств холловской среды. Причина — в жесткой связи вакуумного векторного поля $\text{rot } \mathbf{B} \equiv 0, \text{div } \mathbf{B} \equiv 0$ со своими источниками (аналитическая в области функция полностью задается своим значением на границе).

ЛЕКЦИЯ 5

Стационарные течения без «просвета». Проблемы с бездиссипативным описанием. Нагрев плазмы и движение ионов. Тензор удельного сопротивления плазмы: магнетосопротивление и эффект Холла. Трехкомпонентная среда. Понятие об ЭМГ-сопротивлении.

Итак, разбор, проведенный в предыдущей лекции, показал, что проходящий через неоднородную (в смысле n или nr^2) плазму электронный ток сжимается и протискивает себя сквозь игольное ушко — чтобы войти в царство свободы, сбежав от непосильного (при «синергетическом» объединении с квазинейтральностью) бремени вмороженности. Теперь становится понятна ситуация со стационарными течениями без «просвета», разобранный В. И. Брызгаловым и А. И. Морозовым сразу же после обнаружения эффекта незатекания в гофры. Если линии $nr^2 = \text{const}$ упираются в какое-либо препятствие (хотя бы вакуумный «пузырь»), то электроны вынуждены сходить с них, растекаясь по препятствию в узком пограничном слое, восстанавливая прямолинейное течение после обхода пузыря (рис. 1.13). Как и в случае скин-эффекта положение спасает отклонение от идеальности течения — ненулевая, хотя и исходно сколь угодно малая диссипация, как это зачастую происходит в обычных гидродинамических пограничных слоях. Ток идет через ЭМГ-неоднородную среду, но, подчеркнем еще раз, не по всему объему — и эта ситуация является правилом, а не исключением — с резким увеличением сопротивления себе, которое оказывается конечным (несмотря на исходную малость), поскольку конечным является нарушение вмороженности.

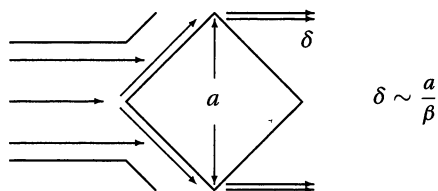


Рис. 1.13. Обход закрывающего просвет препятствия

Заодно можно ответить и на вопрос из конца лекции 3 о разряде батареи через плазму, не обеспечивающую электронам подходящих линий уровня, связывающих электроды. Разряд, несомненно, произойдет (и происходит), но экспериментатор с удивлением обнаружит, что сопротивление ему (напряжение на плазме) будет весьма заметным $R \neq 0$, хотя измерения (см., впрочем, далее, в том числе и следующую лекцию) проводимости демонстрировали $\sigma \rightarrow \infty$.

Ситуация вполне аналогична ударным волнам и уже упомянутым пограничным слоям в обычной гидродинамике, и для поддержания связи здесь удобно предпринять еще один небольшой экскурс в общие вопросы о проявлении малой, но конечной неидеальности в математической физике. Основой послужит универсальное уравнение Бюргерса (1.21), в котором диффузионный член с $D \rightarrow 0$ (но $D \neq 0!$) оказывается играющим на равных правах с конвективным. Хотя в рамках ЭМГ это уравнение по физике дела «скрытнодвумерно», но анализ в предыдущей лекции показал полную согласованность двумерных эффектов с одномерной эволюцией, поэтому разбор будет проведен на математической (точнее, матфизической) основе чисто одномерного баланса, подоплекой чего является намерение обсудить именно общие проблемы теоретического описания явлений в сплошных средах.

У физиков всегда есть естественное, очень весомое и прагматическое желание пренебрегать малыми поправками, сохраняя эффекты. В данном случае оно склоняет к выбрасыванию диссипации и оперированию с эволюцией субстанции B (не обязательно магнитного поля) в рамках как бы идеального (см. ниже) закона сохранения — уравнения Хопфа:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\kappa B^2}{2}}_q = 0 \quad \left(\text{вместо} \quad q = \frac{\kappa B^2}{2} - D \frac{\partial B}{\partial x} \right). \quad (1.26)$$

Излишне последовательное его применение, однако, приводит, как нам уже известно, к неприятному и абсолютно неправильному «перехлесту». Для сохранения возможности исследовать длительную эволюцию системы теоретики проявляют гибкость и вводят в обиход разрывные так называемые *слабые решения*. Основная идея — оставляя дифференциальное (1.26) для описания плавных участков профиля B , задействовать на немногочисленных разрывах его интегральный аналог. Действительно, в строгом и точном (1.21) суммарная «масса» субстанции с плотностью B (для ЭМГ это поток магнитного поля в смысле Φ) тоже сохраняется, и плотность ее потока q совпадает с приближенным (1.26) за пределами «разрывов» (на самом деле — участков с крутым профилем, где невозможно пренебрегать диссипацией). Поэтому, если подвести баланс «напитки» среды B разрывной волной трансляции с разностью потоков слева и справа от ее фронта (как бы интегрирования уравнения Хопфа в духе обращения с δ -функцией), то получится абсолютно правильное выражение для ее скорости из (1.23) (рис. 1.14). Поскольку содержащий скачок отрезок $[x_l, x_r]$ при $\Delta t \rightarrow 0$ может быть выбран сколь угодно малым, такова же скорость движения любого разрыва, в том числе и с переменными

$B_1(t)$ и $B_2(t)$, например, у треугольной волны. На этом языке вполне можно исследовать и более сложные задачи о взаимодействии, в том числе и о слиянии разрывов. Единственное отличие от «настоящего» уравнения Бюргера заключается в неразрешении структуры скачков, подобной (1.23). Для других задач физики сплошных сред может потребоваться аналогичный учет нескольких законов сохранения — так, например, обстоит дело с обычными ударными волнами.

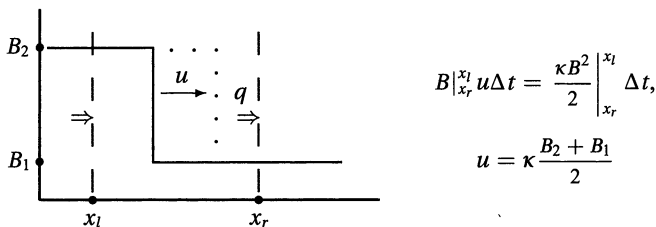


Рис. 1.14. Волна трансляции как слабое решение

Техническая сторона приема выглядит тривиально, но здесь есть математическая и физическая тонкость. Надо понимать, что слабое решение не есть обобщенное решение, поскольку обычная теория обобщенных функций неприменима к нелинейным уравнениям (трудно определить, например, что такое $\delta^2(x)$). Более того, в определенном смысле это вообще не решение. В отличие от гладкого оно разрушает на самом деле бесконечный набор интегралов движения уравнения Хопфа: сохраняя $\int B dx$, не сохраняет $\int B^2 dx$ (как правило, энергию), равно как и все последующие интегралы от степеней B , что не удивительно, поскольку уравнение Бюргера для их плотностей недивергентно и содержит их «сток» из среды. Нетрудно, например, подсчитать, что при распространении волны, изображенной на рис. 1.14, из среды монотонно изымается энергия с темпом, определяемым (1.26), но обеспечиваемым все же диссипацией из (1.21) на самосогласованном профиле (для ЭМГ-задач следует все поделить на 8π)

$$\dot{\mathcal{E}} \sim \frac{d}{dt} \int_{x_l}^{x_r} B^2 dx - \frac{2\kappa(B_2^3 - B_1^3)}{3} = -\kappa \frac{(B_2 - B_1)^3}{6} \equiv 2D \int_{x_l}^{x_r} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) dx$$

(стоит обратить внимание на высокую степень малости эффекта при $B_2 \rightarrow B_1$). Иными словами на единичном пути волна выкачивает из субстанции B энергию

$$\mathcal{E} = \frac{(B_2 - B_1)^3}{3(B_2 + B_1)}. \quad (1.27)$$

Поэтому для реализации таких разрывных решений по физике тела требуется диссипация в системе, а по математике — наличие в уравнениях малых членов с высшими четными производными типа $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^4/\partial x^4$ etc., причем еще и с правильными знаками. А вот, скажем, $\partial^3/\partial x^3$ не годится: она превращает (1.26) в гамильтоново уравнение Кортевега–де Вриза с совершенно другими свойствами (к этому вопросу еще предстоит вернуться в лекции 7). Безоглядное оперирование с разрывами в изложенном духе не всегда идет во благо. Например, если не вникать в полное физическое/математическое описание явления, то непонятен выбор «спасаемого» интеграла (из уравнений Максвелла известно, что Φ сохраняется всегда и везде, а магнитная энергия — необязательно, но для других субстанций B дело может обстоять и по-другому), нестрог и запрет на разрывную волну разрежения с $B_2 < B_1$, несуществующую в рамках (1.21).

Вернемся к ЭМГ-течениям. Тут стоит проявить предусмотрительность. Неизбежно возникающие в случае «общего положения», но в оценках второй лекции в явном виде не учтенные узкие токовые слои порождают сильные последствия: диссипацию (конечное сопротивление вследствие малости сечения тока) или нагрев и движение среды (амплитуда j и градиент магнитного давления велики — следовательно, на плазму или ионы действуют большие силы). Требуется переосмысление исходных предположений о применимости модели ЭМГ. Периодически, кстати, это вообще бывает полезным — догматизма в физике быть не должно, противиться реальности не след. В качестве объекта проверки удобно взять волну (1.23).

Что касается скорости ионов (плазмы), приводимых в движение большой силой Ампера $[j, \mathbf{B}]/c$, то все обстоит по-прежнему благополучно — величина силы компенсируется кратковременностью ее действия, фронт проходит мимо данной точки за $\Delta t \sim \delta/u$, и резко «дергая» ионы, успевает передать им лишь незначительный импульс:

$$M_i n_i v_i \sim \frac{B^2}{\delta} \Delta t \rightarrow v_i \sim v_A \frac{a \omega_{pi}}{c} \left(\delta \sim \frac{a}{\beta}, \quad u \sim \frac{cB}{ne a} \right).$$

В результате скорость их оказывается существенно меньше использованной ранее для оценок альфвеновской, никакого пересмотра не требуется. Любопытно, что три скорости в этой задаче — ионов, альфвеновская и волны — связаны соотношением $v_i u \sim v_A^2$.

А вот нагрев на том же фронте может быть весьма неприятен для модели. Действительно, он оставляет за собой в качестве бегущей «печки» след порядка (ср. (1.27))

$$nT \sim \frac{j^2}{\sigma} \Delta t \sim \frac{c^2 B^2}{\sigma \delta u} \sim \frac{B^2}{8\pi},$$

обеспечивая, как и в обычном скине, своеобразный паритет между наполнением среды B^2 и теплом (что совсем не удивительно после подробного разбора). Как же быть с $P \neq 0$? На самом деле за счет игры конкретных чисел (коэффициента $1/3$ в (1.27), повышенной малости диссипации при малой амплитуде скачка, превышения теплоемкостью электронов единицы и пр.) газокинетическое давление в «следе» оказывается все-таки заметно меньше давления магнитного поля, и по крайней мере качественная картина холодной ЭМГ-модели вполне адекватна. Сюда же можно добавить охлаждение плазмы излучением и возможный сброс тепла вдоль магнитного поля. Для учебного курса оправданий достаточно, а в реальных количественных приложениях внимательность нужна всегда.

Раз динамические уравнения остаются в силе, можно продолжать изучение явления. Выявленная сильная диссипация в ЭМГ-течениях заметно проявляется в энергетическом полевом балансе

$$\frac{\partial B^2}{\partial t} + \operatorname{div} \left(c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{4\pi} \right) = -(\mathbf{j}, \mathbf{E}) \quad (1.28)$$

и для вербальной фиксации эффекта заслуживает специального названия (опыт показывает, что нет термина — нет эффекта, см. ниже): *ЭМГ-сопротивление*. Но новое всегда проявляется на фоне старого, и начинать следует с исследования и фиксации других, стандартных, особенностей прохождения тока через среду в сильном \mathbf{B} . Сопротивление в магнитном поле, нарушающем изотропию среды, имеет вполне сложившуюся четкую терминологию, основанную на тензорном характере материального уравнения, связывающего вектора электрического поля и плотности тока: $E_i = \rho_{ik} j_k$, и ее надо знать. Нетрудно видеть, что используемое здесь (1.9) соответствует следующему тензору удельного сопротивления плазмы (в системе координат с $\mathbf{e}_z \parallel \mathbf{B}$)

$$\rho_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} & \frac{\beta}{\sigma} & 0 \\ -\frac{\beta}{\sigma} & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

На самом деле ρ_{zz} за счет кинетических эффектов (большого искажения функции распределения составляющей \mathbf{E} вдоль \mathbf{B}) отличается от $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ — в разы при $\beta \rightarrow \infty$. Тривиально, но иногда упускается из виду, что обращение тензоров отлично от обращения скалярных величин, поэтому тензор проводимости среды $\sigma_{ik} = \rho_{ik}^{-1}$ как функция B устроен по-другому (см. задачу 2).

А в общезначимой номенклатуре все определяет наличие зависимости именно и только $\rho_{ik}(B)$: при ее появлении у диагональных

компонет (симметричных, ответственных за диссипацию — см. (1.28) — и, следовательно, четных функций B) говорят о *магнетосопротивлении*, тогда как аналогичную вещь у «косых» (формально бездиссипативных антисимметричных) называют уже знакомым термином *эффект Холла*. Поскольку ЭМГ-сопротивление связано с ним, значит, магнетосопротивление представляет собой нечто другое, и надо уметь их различать. Парадоксальным образом сам факт зависимости диагональных компонент $\rho_{aa}(B)$ давно известен в плазме (он, скажем, подробно разобран в классическом обзоре С. И. Брагинского «Явления переноса в плазме»), но непонятное отсутствие в этой области указанного термина, широко применяемого в физике твердого тела, приводит к периодическим «переоткрытиям» эффекта — в голове не оседает емкое красивое слово.

Собственно, магнетосопротивление видно уже на примере пусть незначительных, но отличий в величине ρ_{zz} . Но по-настоящему оно проявляется в трехкомпонентной среде. Простейший пример — слабоионизованная плазма: электроны + ионы + нейтралы (или электроны + дырки + решетка в собственных полупроводниках), вследствие сильного трения ионов о «третье тело» — нейтралы, описываемая «аристотелевой» механикой

$$0 = -neE - \frac{ne}{c}[\mathbf{v}_e, \mathbf{B}],$$

$$0 = zn_i eE + \frac{zn_i e}{c}[\mathbf{v}_i, \mathbf{B}] - \frac{n_i M_i}{\tau_i} \mathbf{v}_i.$$

Третий компонент в силу своей массивности (например, из-за $n_0 \gg n_i$) считается неподвижным и в процессе участвует лишь косвенно (но существенно). В первом приближении для простоты столкновениями электронов можно пренебречь: главную роль в динамике играет потеря $e + i$ плазмой импульса, а он у массивного ионного компонента больше.

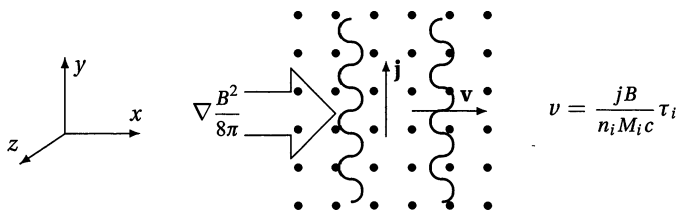


Рис. 1.15. Магнетосопротивление в трехкомпонентной системе

В привычном уже случае одномерного квазинейтрального движения с $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, $\mathbf{j} = j\mathbf{e}_y$, изображенного на рис. 1.15, общая магнитная

сила $[\mathbf{j}, \mathbf{B}]/c$ «сгребает» плазму как целое по x . При этом из-за квазинейтральности $v_{ex} = v_{ix} = v$, а $-nev_{ey} = j$ — ток переносят «сверхпроводящие» электроны: в системе отсчета, движущейся с \mathbf{v} , $E_y = 0$, и ионы не могут включиться в процесс, их останавливает трение. Скорость сгребания в данных условиях легко находится из суммы уравнений, после чего подстановка $\mathbf{v}_e = -\mathbf{j}/(ne) + \mathbf{v}$ в электронное приводит к искомому закону Ома

$$\mathbf{E} = \frac{1}{nec} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \underbrace{\frac{\tau_i B^2}{n_i M_i c^2}}_{\rho_{yy}(\rho_{xx})} \mathbf{j}.$$

(ср. с (1.9)).

Естественно, это соотношение относится лишь к компонентам поля и тока, перпендикулярным оси z — $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$, в данном приближении не вызывает появления \mathbf{E} . Соответствующий тензор удельного сопротивления в плоскости x, y выглядит как

$$\rho_{jk} = \begin{pmatrix} \beta_i^2 & z\beta_i \\ \sigma_i & \sigma_i \\ -z\beta_i & \beta_i^2 \\ \sigma_i & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \sigma_i = \frac{z^2 n_i e^2}{M_i} \tau_i, \quad \beta_i = (\omega_{Bi} \tau_i)^2,$$

где введено специальное обозначение для ионных проводимости и замagnetичности. Видно квадратичное возрастание сопротивления, причем речь уже идет отнюдь не о числе (эта квадратичность отчасти иллюзорна, она характеризует зависимость $\rho_{aa}(B)$ при неизменности других параметров плазмы, см. задачу 4). Эволюция поля в среде с таким материальным уравнением происходит по закону нелинейной диффузии:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2 \beta_i^2}{4\pi \sigma_i} \frac{\partial B}{\partial x} \right). \quad (1.29)$$

Любопытно, что при столь сильной диссипации сохраняется вмороженность \mathbf{B} в электроны: поперечная диффузионность не обязательно ее отменяет (действительно, соотношение $E_y = -v_{ex} B/c$, позволяющее для произвольного поперечного электрического поля подобрать как бы фиктивную скорость сноса, вполне идеально).

Фактически, на что обратил внимание В. В. Владимиров с соавторами как раз по поводу плазмы в собственных полупроводниках, в данной ситуации имеет место обычный пинч-эффект, просто из-за аристотелевизма $\mathbf{v} \propto \tau_i \nabla B^2$, что и превращает идеальное $\partial B/\partial t + \text{div } B\mathbf{v} = 0$ в диссипативное (1.29). Энерговыведение в системе происходит за счет «продирания» плазмы сквозь нейтральную

среду: трение развивается при движении поперек тока. В общем случае наличия заряда, взаимных столкновений и движения у всех трех компонент (например, в плазме с двумя сортами ионов) уравнение для эволюции \mathbf{B} более громоздко, но принципиальных отличий нет: имеет место многократное квадратичное по полю возрастание диссипации при разделении ионов с разными z/M_i , движущихся с разными скоростями и потому трущихся друг о друга. Есть, правда, и нюансы, например, в переносе тока теперь могут участвовать и ионы разных знаков. Важно осознать, что появление третьего компонента в плазме приводит к реальной дополнительной диссипации — таков уж неперемный атрибут магнетосопротивления.

Так вот, эффект Холла, существующий уже в двухкомпонентной среде, принципиально иной, он как бы вообще не входит в энергодобаланс — сидит в потоке \mathbf{S}_E , а не в стоке Q . Он пособник, даже организатор отъема энергии у поля, но никак не исполнитель. С точки зрения общей физики ЭМГ-сопротивление — не вполне сопротивление! В нем нет дополнительных механизмов диссипации, ее величина резко растет за счет перераспределения тока: это макро-, а не микроскопический эффект. Все основано на примитивном математическом факте, что $\langle j^2 \rangle > \langle j \rangle^2$ (как правило, \gg). Хотя величина общего напряжения на плазме

$$U(B) = IR(B) = \int E_{\parallel} dl \equiv \int \frac{j}{\sigma} dl,$$

набираемая вдоль тока, может быть очень велика и вполне сопоставима с сильнейшим эффектом магнетосопротивления, но в одном случае она набирается за счет величины $1/\sigma$, а в другом — j и общей длины токового слоя L , возможно, значительно превышающей расстояние между электродами. При локальном наблюдении легко увидеть, что в последнем варианте $E_{\parallel}/j \neq U/I$, и распределение потенциала весьма неоднородно.

Сравнимое U (т. е. R) при магнито- и ЭМГ-сопротивлениях возникает совершенно по-разному: шунты из 1 см нихрома и 1 м меди, являясь эквивалентными элементами цепи, заметно отличаются внутренней конструкцией. Если с сильным увеличением заглянуть внутрь среды, оказывающей магнетосопротивление I от внешнего источника, то можно увидеть достаточно равномерное заполнение ее током, большую составляющую электрического поля вдоль \mathbf{j} , эффективный механизм трения. Аналогичная процедура со средой, где диссипация порождена ЭМГ-эффектами, покажет очень неоднородное распределение тока (в большей части плазмы его вообще может не быть), большое $\mathbf{E} \perp \mathbf{j}$ и весьма слабое трение носителей тока. По

закону Ома сопротивление проводника пропорционально его удельному сопротивлению и длине и обратно пропорционально площади сечения. В одном варианте изменению в магнитном поле подвергается удельная характеристика среды, а в другом — ее глобальная геометрия (точнее, геометрия течения электронов через среду, а не самой среды).

На самом деле при должной внимательности исследователя отличия этих сопротивлений могут быть выявлены и в макроскопических наблюдениях. Во-первых, они видны в динамике: распространение поля через среду имеет совершенно разные скейлинги (из-за вклада в $\text{rot } \mathbf{E}$ производных по разным направлениям, см. (1.21))

$$\frac{1}{t} \propto \frac{1}{l_x l_y} \quad \nu S \quad \frac{1}{l_x^2}$$

($\langle \mathbf{j} \rangle \parallel \mathbf{e}_y$, νS представляет собой сокращение латинского versus, т. е. «против»), соответственно, по x конвективный и диффузионный. Во-вторых, сложная геометрия токов в ЭМГ-течениях не всегда «вписывается» в среду, что приводит к возникновению геометрических эффектов — отклонений от тривиального закона Ома

$$R_{\text{ЭМГ}} \not\propto \frac{l_y}{l_x}$$

(здесь и в следующей лекции l_x, l_y — уже размеры среды). Отличия поняты, можно заняться новым.

ЗАДАЧИ

- Какова была бы скорость волны трансляции u' в среде, сохраняющей энергию субстанции B , а не ее «массу»?

Решение. В этом случае нужно искать слабое решение не самого уравнения Хопфа (1.26), а его произведения на B :

$$\frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\kappa}{3} B^3 \right) = 0.$$

Интегрирование этого соотношения на разрыве по x (ср. рис. 1.14) дает

$$u' B^2 \Big|_{x_r}^{x_l} = \frac{2\kappa B^3}{3} \Big|_{x_r}^{x_l} \quad \rightarrow \quad u' = \frac{2\kappa}{3} \frac{B_2^2 + B_1 B_2 + B_1^2}{B_2 + B_1}.$$

Видно, что при любых $B_2 > B_1$ такая волна трансляции будет существовать, была бы более быстра $u' > u$ (и $u' \rightarrow u$ при $B_2 \rightarrow B_1$), и потому нуждалась бы в генерации «плотности» B на фронте (например, за счет наличия добавочной составляющей потока B^2 вида $-\alpha \partial B^3 / \partial x$ с $\alpha > 0$).

- В средах с законом Ома (1.9) эффект магнетосопротивления отсутствует. А как зависят от B в этом случае диагональные элементы тензора удельной проводимости в $j_j = \sigma_{jk} E_k$?

Решение. В двумерном варианте для этого тензора получается классическое выражение

$$\sigma_{jk} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + \beta^2} & -\frac{\beta\sigma}{1 + \beta^2} \\ \frac{\beta\sigma}{1 + \beta^2} & \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{j} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{1 + \beta^2} + \frac{\sigma e \tau_e}{mc} \frac{[\mathbf{B}, \mathbf{E}]}{1 + \beta^2},$$

т. е. искомая зависимость сильна — именно поэтому требуется четкость в терминологии. Малость (при $\beta \gg 1$) σ_{aa} возникает из-за большой величины недиагональных компонент ρ_{ab} . Как выглядит σ_{ik} в трехмерной задаче?

3. Обратить двумерный тензор удельного сопротивления трехкомпонентной среды и сравнить полученный σ_{jk} с предыдущим вариантом.

Решение. В данном случае, опуская индекс i , получаем

$$\sigma_{jk} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{z^2 + \beta^2} & -\frac{z\beta\sigma}{z^2\beta^2 + \beta^4} \\ \frac{z\beta\sigma}{z^2\beta^2 + \beta^4} & \frac{\sigma}{z^2 + \beta^2} \end{pmatrix}.$$

Формально отличия диагональных компонент от предыдущего варианта не слишком заметны, хотя здесь они малы исключительно вследствие роста в магнитном поле ρ_{aa} , а вот недиагональные весьма показательны. Что происходит в трехмерии здесь?

4. В какой мере можно использовать обезразмеренное квадратичное (1.29)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B^2 \frac{\partial B}{\partial x} \right)$$

для описания длительной эволюции магнитного поля?

Решение. Даже в случае неподвижности нейтральной компоненты, т. е. при $\tau_i = \text{const}$, необходимо учитывать изменение концентрации плазмы при ее сгребании: настоящий коэффициент диффузии пропорционален B^2/n . В силу вмороженности магнитного поля в электроны, B и n меняются согласованно

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(Bv)}{\partial x} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{B}{n} = 0,$$

так что их отношение в данном лагранжевом элементе среды неизменно. Если, скажем, в начальный момент всюду $B \propto n$, то на самом деле эволюция будет соответствовать

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(|B| \frac{\partial B}{\partial x} \right).$$

В общем же случае следует решать выписанные уравнения для B и n одновременно (В. В. Владимиров и др., В. Ю. Забурдаев). Надо хорошо отдавать себе отчет, что именно описывает та или иная формула.

ЛЕКЦИЯ 6

ЭМГ-повышение диссипации. «Эффективная» проводимость с формальной $\nu_{\text{eff}} = \omega_{Be}$ и полевое представление ЭМГ-сопротивления. Универсальная формула 30 μ/c Ом. Мелкомасштабные флуктуации концентрации и мезоскопическое усреднение. Геометрические эффекты.

Итак, ЭМГ-сопротивление возникает при наличии тех или иных неоднородностей плазмы с $\beta \gg 1$ (в однородной двумерной среде потенция эффекта Холла «скрыта» ввиду его потенциальности), создающих крупные препятствия потоку электронов. Природа этих неоднородностей может различаться, но избежать их присутствия в реальной системе весьма затруднительно: концентрация плазмы как правило непостоянна, и ток через нее обычно пропускают, погружая внутрь электроды. Эффекты, связанные с этими обстоятельствами, стоит рассмотреть поподробнее.

Начнем со стационарного ЭМГ-течения поперек линий уровня n (или nr^2), происходящего в узких слоях $\delta \sim a/\beta$. В плоской псевдоодномерной геометрии, уже использованной для скин-слоевых задач (см. рис. 1.6), но с так называемой «двусторонней запиткой», т. е. при пропускании тока J на единицу длины по z вдоль оси y через конечный по x слой плазмы толщиной $2l_x$, распределение магнитного поля описывается уравнением (ср. (1.21))

$$\frac{1}{a} \frac{eB}{mc} \tau_e \frac{dB}{dx} = \frac{d^2 B}{dx^2} \quad \left(\frac{1}{na} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dy} \frac{1}{n} \right), \quad B(\mp l_x) = \pm B_0 = \pm \frac{2\pi J}{c}$$

(по-прежнему, в пренебрежении «перекосом» токов). Его решение есть

$$B = \begin{cases} -B_1 \operatorname{tg}\left(\frac{x\beta_1}{|a|}\right), & a < 0 \\ -B_1 \operatorname{th}\left(\frac{x\beta_1}{a}\right), & a > 0 \end{cases},$$

где B_1 определяется как раз из граничных условий. Полезно сравнить эти (анти)симметричные распределения с односторонними запирианием (1.22) и конвективной волной (1.23). В обоих вариантах ток (его плотность — производная от поля) занимает малую долю объема — он либо сосредоточен у границ, либо контрагирован в центре. В любом случае диссипация в системе не зависит от σ (микроскопического τ_e): вследствие баланса эффектов (подстраивания стандартного j/σ под эффект Холла) и сильного отклонения от идеальности.

В полученных формулах нетрудно увидеть и указанное в предыдущей лекции расхождение средних, связанное с «пикированностью»

распределения j : действительно, его средний квадрат определяется джоулевым тепловыделением

$$\int_{-l_x}^{l_x} \frac{j^2}{\sigma} dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle j^2 \rangle}{\sigma} 2l_x \sim \frac{j_{\max}^2}{\sigma} \delta,$$

а просто среднее значение — током согласно

$$J = \int_{-l_x}^{l_x} j dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle j \rangle 2l_x \sim j_{\max} \delta,$$

следовательно,

$$\langle j^2 \rangle \sim \langle j \rangle^2 \underbrace{\frac{l_x}{\delta}}_!$$

Полное же энергосодержание (опять-таки на единицу длины по z , т. е. вдоль **B**) есть

$$Q \sim \frac{\langle j^2 \rangle}{\sigma} l_x l_y \sim \frac{\langle j \rangle^2 \beta}{\sigma} l_x^2 \sim J^2 \frac{\beta}{\sigma} \quad (1.30)$$

(здесь положено $l_y \sim |a|$). Естественно, τ_e успешно сокращается.

Не менее кардинальны эффекты, сопровождающие втекание и вытекание тока из электродов. Поскольку последние как правило изготовлены из очень хороших обычных проводников, то вблизи них в плазме не может существовать электрическое поле, направленное вдоль поверхности:

$$E_{\parallel} \propto \beta j_{\perp} + j_{\parallel} = 0$$

(см. (1.9)), т. е. ток входит в среду (выходит из нее) под малым углом $\angle \alpha \approx 1/\beta$ (точнее, β^{-1} равен его тангенс). Если для определенности посчитать, что электрод расположен вдоль оси x , то отсюда следует, что вблизи него всегда присутствует «паразитная» (поскольку не участвует напрямую в переносе тока между электродами), но очень большая составляющая $j_x = \beta j_y$. Разумеется, с удалением от «возмутителя» состояния ЭМГ-течения — электрода токовые линии разворачиваются, и в объеме J направлен главным образом по y (впрочем, см. рис. 1.18 в конце лекции). Для качественных оценок можно считать, что разворот происходит в слое толщины l_x/β (на самом деле картина бывает много сложнее, энергосодержание не равномерно по поверхности электрода, а концентрируется в так называемых «напряженных углах» вблизи «встречи» электрода с границей плазмы по x , существенно влияние нелинейности, а также является

ли запитка системы дву- или односторонней и пр.). В этом варианте снова получается, что

$$\langle j^2 \rangle \approx j_x^2 \gg j_y^2 = \langle j \rangle^2,$$

и опять τ_e исчезает из оценки диссипации, создаваемой одним электродом

$$Q \sim \frac{j_x^2}{\sigma} l_x \frac{l_x}{\beta} \sim \frac{j_y^2 \beta}{\sigma} l_x^2 \sim j^2 \frac{\beta}{\sigma}. \quad (1.31)$$

Даже если попытаться идеально вписать ток в среду за счет специального подбора формы инжектирующих его электродов, скажем, организовать течение вдоль y , погружая в плазму электроды параболической формы $y \propto x^2$ (почему?), то все равно «эффективно» будет использована лишь малая доля их площади.

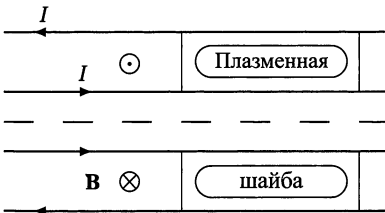
Уравнения (1.30) и (1.31) очень схожи и демонстрируют одинаковую, уже не раз продекларированную нечувствительность к микроскопической проводимости ЭМГ-проводника σ . Естественно, возникающее на нем макроскопическое напряжение $U = Q/J$ также не зависит от этой характеристики среды. Здесь уместно снова сравнить явление с ударной волной и пограничным слоем в обычной гидродинамике: там тоже малые вязкость и теплопроводность определяют внутреннюю форму «разрывных» профилей, но никак не темп нагрева и величину нарабатываемой энтропии. Реальные диссипативные процессы, без которых изучаемые структуры были бы невозможны, не дают тем не менее вклада в интегральный ответ: его величина исполнителям задается указанием «сверху» — необходимостью удовлетворить законам сохранения.

Иногда желание простого учета разобранных эффектов заставляет идти на грубость теоретической (или счетной) модели для явления. В данном случае можно посчитать, что раз уж неперменная потеря вмороженности (идеальности) все равно приводит к конечной диссипации за счет баланса $\beta\delta/a \sim 1$ (в обычной газодинамике $Re \sim 1$), то стоит положить $\tau_e \sim \omega_{Be}^{-1}$ (микроскопическую длину пробега, определяющую вязкость — характерному масштабу течения) с самого начала, и не забивать себе голову какими-то слоями. Это хорошее мнемоническое правило, однако описание локальной σ_{eff} , конечно же, не слишком адекватно — разные части плазмы дают совершенно разный вклад в эффект. В принципе, любое приближение эффективно, если исполнитель знает ему цену и готов ее платить (мы не раз еще вернемся к этой сентенции) — например, ни в коей мере не претендовать на предсказание структуры течения, но все-таки желательно иметь столь же простую, но исходно интегральную характеристику явления ЭМГ-сопротивления.

Но до перехода к выводу такой характеристики стоит взглянуть на ЭМГ-сопротивление еще с одной — микроскопической — стороны, попытавшись сопоставить его с так называемым аномальным сопротивлением, проистекающим из-за рассеяния электронов на каких-то когерентных структурах (обычно, волнах). Отличия весьма сильны: микроскопические процессы при обычных слаботурбулентных аномальностях имеют дело с механическими импульсом и энергией и потому локальны. Простое изменение направления движения электрона, происшедшее в точке его встречи с волной, уже означает потерю им импульса $|\Delta p| \sim m u$, где u — токовая скорость, а связанная с этим процессом «перекачка» приобретенной в электрическом поле направленной кинетической энергии в хаотическую — нагрев с общим темпом

$$\frac{n m u^2}{\tau_e} = \frac{j^2}{\sigma}.$$

Потери полевой энергии $B^2/(8\pi)$ и импульса eA/c давали бы неизмеримо больший эффект, но они интегральны, поскольку зависят не только от внутренних свойств частицы, но и от ее пространственного положения. Для их изменения необходимо смещение электронов и, стало быть, макроскопичность препятствий $a \gg c/\omega_{pe}$ — что, собственно, и наблюдается в исследованных выше случаях. Конечно, это весьма формальная аналогия, но все-таки аналогия.



$$\int c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{4\pi} d\mathbf{f} \simeq \frac{I}{ne} \frac{B^2}{4\pi} \simeq \frac{I}{\pi n e^2 c^2} I^2$$

Рис. 1.16. Обобщающая модель ЭМГ-сопротивления

Обещанная простая модель, обобщающая (1.30), (1.31), опирается на принципиальность несохранения потока энергии $j/(ne) \cdot B^2/(4\pi)$ и имеет дело с цилиндрической геометрией, чтобы не связываться с усложняющими жизнь нормировками на единицу длины. Представим себе плазменную «шайбу», закорачивающую коаксиальную линию (весьма часто встречающийся в экспериментах по импульсной электронике объект) (рис. 1.16). Протекающий через плазму от внутреннего к внешнему электроду (или в обратном направлении) ток транспортирует по радиусу вместе с электронами и энергию. Нетрудно заметить, что соответствующий поток энергии не может сохраняться: ток I неизменен, но $n r^2$ (особенно при переходе из

плазмы в металл) заведомо не таково, и, следовательно, обязан диссипировать с эффективностью $O(1)$. Приравняв потери $I^2 R$ (с учетом связи $B = 2I/(cr)$), можно выписать искомую универсальную и фундаментальную формулу

$$R = \frac{I}{\pi n e r^2 c^2} = \frac{1}{c} \frac{\langle u \rangle}{c} = 30 \frac{\langle u \rangle}{c} \text{ Ом.} \quad (1.32)$$

Универсальность и удобство видны из двух аспектов. Во-первых, входящая в нее «средняя» токовая скорость определяется без малейшего представления о настоящем распределении $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, померить или рассчитать (без подробной информации о $n(\mathbf{r})$) которое бывает весьма непросто. Для ее оценки нужны достаточно грубые характеристики — полный ток, геометрия объекта и концентрация плазмы, а например, чрезвычайно плохо устанавливаемое β (никто никогда не знает, чему в горячей плазме равно τ_e) без надобности. Во-вторых, из обязательности воздействия на электроны силы Лоренца, которую можно «перекрыть», но не уничтожить (см. рассуждения об универсальности эффектов ЭМГ во второй лекции) следует, что (1.32) является эффективной оценкой снизу реального сопротивления среды. Меньше быть не может, а больше сколько угодно — например, просто из-за малого σ при $\beta \rightarrow 0$ (скажем, в квартирных розетках ЭМГ-сопротивление перекрыто обычным — медь является хорошим проводником ввиду значительности величины n , но отнюдь не τ_e), или вследствие множественности ЭМГ-препятствий, см. ниже.

В большом внешнем магнитном поле (1.32) дает $R_{\text{ЭМГ}} \propto B_0/n$ (см. задачу 1). Первое экспериментальное наблюдение этого эффекта было задолго до возникновения термина и даже самой теории ЭМГ как таковой. В конце 1920-х гг. П. Л. Капица, находясь еще в Кембридже, создал новый инструмент воздействия на вещество — источник громадного по тем временам импульсного магнитного поля. Засовывая в него все, что было под рукой (простая, но весьма эффективная метода), он, в частности, обнаружил в висмуте то, что получило название «линейного закона Капицы»: большое, пропорциональное полю сопротивление. Более того, охлаждение объекта до азотных и гелиевых температур вызывало резкое увеличение коэффициента этой пропорциональности. Остается напомнить, что висмут является полуметаллом и имеет небольшую концентрацию носителей тока ($\sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$ при комнатной и на несколько порядков меньше при азотной температурах). Экспериментальные данные имеют хорошее и количественное совпадение с формулой (1.32). Интересно, что фактически в этих экспериментах измерялись свойства контакта с подводящими клеммами, а не самого висмута. Сейчас для отстраивания от

подобных эффектов специально разделяют измерительные электроды с электродами, подводщими ток.

Подчеркивая принципиальные различия магнето- и ЭМГ-сопротивления, не стоит забывать и о том, что жизнь богаче всякой номенклатуры. В случае присутствия в плазме мелкомасштабных (по отношению к размерам среды, но никак не к c/ω_{pe}) флуктуаций n , возможен вариант с ее «глобальной» однородностью, позволяющей проводить мезоскопическое усреднение характеристик. Оказывается, что в этом случае недиагональные компоненты ρ_{ik} могут «замаскироваться» под диагональные. При не слишком сильном увеличении внутри плазмы будут заметны равномерность j и большая величина $1/\sigma$ в локальном (на промежуточных масштабах) законе Ома, и лишь при более пристальном взглядывании выявятся токовые слои и малость той $1/\sigma$ на микроскопическом уровне.

Такое ЭМГ-сопротивление может значительно вырасти по сравнению с универсальным минимумом — ведь при последовательном соединении шунтов их сопротивления складываются. Простейшим примером такого усиления является токовая «змея» при

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} (1 + A \cos ky),$$

изображенная на рис. 1.17. Холловский снос поля по x здесь в зависимости от знака dn/dy тянет линии тока в разные стороны, наоборот, чрезвычайно сильно «перекашивая» его. Процесс стабилизируется с приближением параметра иерархичности к единице, когда медленная диффузия за счет эффекта «ножниц» начинает успевать разравнивать профиль B за быстрой конвекцией, как бы «перезамыкая» потоки.

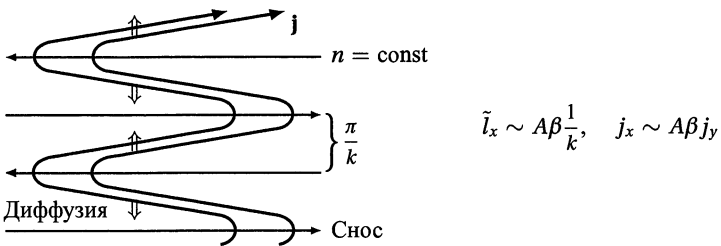


Рис. 1.17. Токовая змея в периодической среде

В стационаре электроны движутся по синусоидальным линиям с размахом \tilde{i}_x и периодом $2\pi/k$. Средняя по масштабам, большим этих, плотность тока $\langle j \rangle = j_y$, но основной вклад в средний джоулев отбор $B^2/(8\pi)$ дает другая, флуктуирующая компонента $\mathbf{j} - \langle \mathbf{j} \rangle \approx \langle j_x^2 \rangle$, поэтому при нормировании на макроскопический ток диссипация

оказывается увеличенной в $A^2\beta^2/2$ раз. Токовый слой здесь одновременно и узкий и длинный, он как бы сложен «гармошкой», и одно β возникает в R из-за длины, а другое — из-за сечения, т. е. на масштабах $l_x \gg \tilde{l}_x$ эволюция магнитного поля описывается уравнением

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{A^2\beta^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial B}{\partial x} \right] \quad (1.33)$$

(если в ее процессе иерархический баланс успевает отслеживать $B(t)$), ср. (1.29). Видно, что действительно мезоскопическая конвекция (ЭМГ) вполне может приводить к усиленной макроскопической диффузии (магнетосопротивлению)! Макроскопическое большое электрическое поле вдоль среднего \mathbf{j} создается мезоскопическим холловским полем, перпендикулярным истинному \mathbf{j} : знакопеременность производящего это поле j_x не порождает 0 при усреднении, поскольку течения в разных направлениях по x происходят при разных значениях плотности — справа налево меньшем, чем слева направо (при $B > 0$), см. задачу 2.

В общем случае мелкомасштабной неоднородности очень существенна топология линий уровня n , течение вдоль которых не приводит к сильной диссипации — далеко ли можно по ним уйти, каковы ширина благоприятного пути и его извилистость, не проще ли прорваться напролом и т. д. Более подробный разбор открывающихся возможностей будет проведен в лекциях 9 и 10.

Напоследок стоит проанализировать упомянутую в конце предыдущей лекции возможность нетривиальных геометрических зависимостей сопротивления, отличных от стандартного $R \propto l_y/l_x$. С формальной позиции отклонения связаны тем, что ЭМГ-эволюция как правило рождает собственные (дополнительные) внутренние масштабы, никак не связанные с навязываемой извне формой среды. Представленные выше объекты позволяют продемонстрировать сильные отклонения от обычного закона Ома и по числителю, и по знаменателю привычной дроби.

Если ЭМГ-сопротивление развивается в однородной плазме шириной l_x , расположенной между плоскими электродами, находящимися на расстоянии l_y друг от друга, то формула (1.31) свидетельствует об отсутствии зависимости интегрального R от l_y . На самом деле это справедливо лишь в некотором диапазоне межэлектродных расстояний (рис. 1.18). Действительно, с грубой электротехнической точки зрения такая система представляет собой плазменный шунт с высокой σ , к торцам которого пристыкованы резисторы малой толщины l_x/β , но с большим сопротивлением $\propto \beta/\sigma$ (рис. 1.18 справа вверху). Как не хороша проводимость плазмы, но наращивание длины системы

до величин $l_y \gg \beta l_x$ неизбежно приведет к доминированию увеличившегося сопротивления «шунта» над неизменными сопротивлениями «резисторов», и, следовательно, к стандартной зависимости $R \propto l_y/\sigma$.

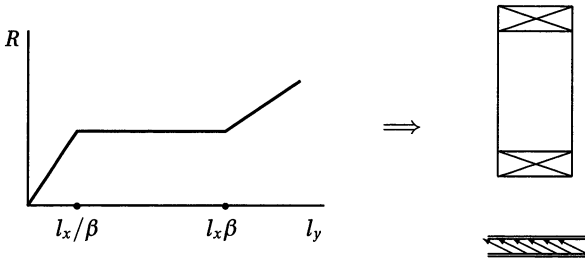


Рис. 1.18. Геометрические эффекты в электродном варианте

С другой стороны, соотношение (1.31) выводилось в предположении о том, что размер плазмы позволяет успешно совершить разворот косога приэлектродного тока в нужном направлении. Если $l_y \ll l_x/\beta$, то линии тока так и остаются прямыми (рис. 1.18 уже справа внизу), и межэлектродный зазор вполне может характеризоваться не интегральным R , а локальным $\rho \sim \beta^2/\sigma$ (общая повышенная диссипация теперь пропорциональна l_y). Система снова возвращается к стандарту, но с куда бóльшим коэффициентом пропорциональности.

В случае токовой «змеи» не менее сильным изменениям подвергается зависимость R уже от l_x (рис. 1.19). При очень больших ширинах плазмы работает мезоскопическое усреднение и $R \propto \beta^2/(\sigma l_x)$.

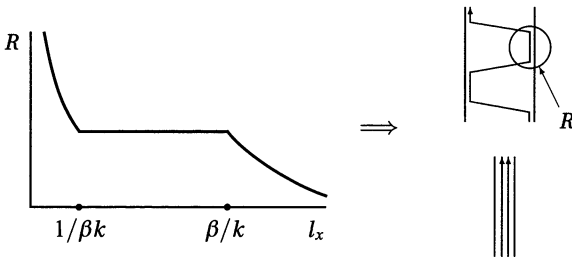


Рис. 1.19. Геометрические эффекты в варианте «змеи»

Однако при сужении до $l_x \leq \tilde{l}_x$ «змея» начинает упираться в границы и сопротивление садится на пристеночных слоях, аналогичных (1.22), изображенных на рис. 1.19верху справа. До тех пор, пока l_x остается больше ширины этих слоев $1/(\beta k)$ (ср. снова (1.22)), их вклад в R стабилизирован (см. (1.30)). С переходом через это значение ток вынужден течь исключительно по y , протискиваясь в очень узкую

среду с очень маленьким удельным сопротивлением $1/\sigma$ (рис. 1.19 внизу справа) и происходит ренессанс стандарта, уже с куда меньшим коэффициентом пропорциональности.

В обоих вариантах видна весьма богатая иерархия масштабов, полный спектр возможностей ЭМГ-сопротивления проявляется при прохождении целых двух сильных неравенств. Это чрезвычайно неприятно для компьютера, что сильно затрудняет адекватное численное моделирование экспериментальных ситуаций. Использование упомянутой выше формулы $\sigma_{\text{eff}} = ne^2/(m\omega_{Be})$ ($\beta \sim 1$) здорово упрощает жизнь, но позволяет качественно ухватить лишь интегральные эффекты.

ЗАДАЧИ

1. Как выглядит универсальная формула (1.32) в случае наложения на систему большого внешнего поля B_0 ?

Решение. Внешнее поле равномерно ($B_0 = \text{const}$ в плоской геометрии и $B_0 r = \text{const}$ в цилиндрической) заполняет пространство, и его снос током не приводит к каким-либо изменениям. Поэтому в данном варианте в диссипируемом энергопотоке следует учесть первый нетривиальный — линейный по полю тока \tilde{B} — вклад в «энтальпию» суммарного магнитного поля:

$$\int \mathbf{S}_E d\mathbf{f} \sim \frac{I}{ne} \frac{B_0 \tilde{B}}{2\pi}.$$

В справедливости такого подхода можно убедиться, переписав (1.30), (1.31) на случай $B_0 \gg \tilde{B}$. Формула (1.32) превращается в

$$R \sim \frac{B_0}{\pi n e c r}.$$

2. Найти точные выражения для эффективных проводимости и холловского параметра при стационарном протекании тока через слоистую среду с флуктуациями n (см. рис. 1.17) в сильном внешнем поле B_0 .

Решение. Записав обобщенный закон Ома в виде

$$\begin{cases} E_x = \beta \frac{j_y}{\sigma} + \frac{j_x}{\sigma} \\ E_y = -\beta \frac{j_x}{\sigma} + \frac{j_y}{\sigma} \end{cases}, \quad \beta = \beta_0 + \tilde{\beta}(y) \propto \frac{B_0}{n}$$

и проведя мезоскопическое усреднение по y , а также воспользовавшись тем, что в стационаре $E_x = E = \text{const}$, $j_y = j = \text{const}$ (почему?), можно найти, что

$$E = \beta_0 \frac{j}{\sigma}, \quad j_x = -\tilde{\beta} j, \quad \langle E_y \rangle = -\frac{\langle \tilde{\beta} j_x \rangle}{\sigma} + \frac{j}{\sigma},$$

откуда

$$\langle E_y \rangle = \frac{j}{\sigma} (1 + \langle \tilde{\beta}^2 \rangle).$$

Таким образом, в полном соответствии со сделанными в тексте оценками, в случае больших флуктуаций β

$$\sigma_{\text{macro}} \approx \frac{\sigma}{\langle \beta^2 \rangle}, \quad \beta_{\text{macro}} \approx \frac{\beta_0}{\langle \beta^2 \rangle}.$$

Можно также (см. лекцию 9) вместо специальных обозначений для постоянной и переменной составляющих замагниченности использовать непосредственное представление $\beta_0 \rightarrow \langle \beta \rangle$, $\tilde{\beta} \rightarrow \beta - \langle \beta \rangle$.

3. Утверждению о возникновении ЭМГ-сопротивления вследствие перераспределения плотности тока из-за эффекта Холла можно придать строгое звучание. Для этого надо обратить внимание на то, что если ток I через плазму пропускается за счет подачи напряжения U на погруженные в нее электроды, то объемное интегрирование по частям «стока» магнитной энергии (\mathbf{j}, \mathbf{E}) с учетом стационарных соотношений $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и $\text{div } \mathbf{j} = 0$ дает

$$-\int (\mathbf{j}, \nabla\varphi) dV = -\int \text{div } \varphi \mathbf{j} dV = -\int_A \varphi(\mathbf{j}, d\mathbf{f}) - \int_K \varphi(\mathbf{j}, d\mathbf{f}) = I(\varphi_A - \varphi_K) = IU$$

(буквы A и K обозначают катод и анод, на бесконечности подинтегральная функция достаточно быстро стремится к 0). Здесь приняты во внимание эквипотенциальность электродов и взаимная ориентация \mathbf{j} и $d\mathbf{f}$ на них. Теперь осталось показать, что «включение» эффекта Холла в обобщенном законе Ома (1.9) при неизменном I увеличивает значение этого интеграла, т. е. приводит к возрастанию U и, стало быть, интегрального R .

Решение. Речь идет о том, что из (1.9) следует равенство посчитанного интеграла джоулеву производству тепла $\int (j^2/\sigma) dV$, а оно, как хорошо известно, минимально при $\text{rot } \mathbf{j}/\sigma \equiv 0$, что в стационаре имеет место только при отсутствии влияния эффекта Холла на распределение тока. Доказать это можно, находя экстремум данного функционала тепловыделения с учетом «связи» $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Процедура допускает двойкий подход: с помощью множителя Лагранжа

$$\delta \int \left(\frac{j^2}{\sigma} - \lambda \text{div } \mathbf{j} \right) dV = \int \left(2 \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \nabla \lambda \right) \delta \mathbf{j} dV = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = -\frac{\nabla \lambda}{2}$$

или внося связи непосредственно в вариацию $\delta \mathbf{j} = \text{rot } \delta \mathbf{H}$

$$\delta \int \frac{j^2}{\sigma} dV = 2 \int \delta \mathbf{H} \text{rot } \frac{\mathbf{j}}{\sigma} dV = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rot } \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0$$

(при учете $[\delta \mathbf{H}, d\mathbf{f}]_{A,K} = 0$ — в этом и заключается неизменность I). То, что это именно минимум следует из второй вариации или тривиального рассуждения об отсутствии максимума у данного функционала — сжатием тока в узкий жгут он может быть сделан сколь угодно большим.

Доказанная теорема о возрастании сопротивления из-за эффекта Холла аналогична более общей теореме об увеличении потока из девятой лекции.

ЛЕКЦИЯ 7

Размер c/ω_{pe} и роль инерции при генерации малых масштабов в ЭМГ. Нетривиальность двумерных стационарных течений при общем законе вмороженности. Задача о скине, конвективные волны и ЭМГ-сопротивление с учетом инерции электронов. Инжекция пучков в плазму: дополнительная конвекция и эффект объемного «размораживания».

Настало время еще одного обращения к исходным предположениям или признания в упущении (а точнее, откладывания на как раз и наступившее будущее) в предыдущем анализе дополнительного весьма важного аспекта порождаемой ЭМГ-эволюцией узости электронных течений. Итак, уже понятно, что в однородной двумерной плазме эффект Холла тривиален, в неоднородной же приводит к измельчению масштабов до размеров $\delta \ll a$, сколь угодно малых при сколь угодно малой исходной диссипации. Но на самом деле выписанные формулы хороши и адекватны только если при этом все же $\delta \gg c/\omega_{pe}$, иначе уже на идеальной стадии обобщенный закон Ома выглядит по-другому:

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

(см. (1.10)), в нем появляется инерция носителей тока. Общий, теперь уже с механической составляющей, закон вмороженности (1.12) для быстрых электронов в пренебрежении током смещения, т. е. с

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{4\pi ne} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\operatorname{rot} \mathbf{v} \propto \Delta B)$$

в плоской геометрии и в однородной (иначе выражение становится весьма громоздким) плазме дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(B - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \Delta B \right) = \frac{c}{4\pi ne} \left\{ B, \left(B - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \Delta B \right) \right\}_{x,y}, \quad (1.34)$$

ср. с (1.17). Это уравнение вполне приложимо и к сверхпроводникам. Там из-за эффектов спаривания электронов в ω_{pe} происходит замена $e \rightarrow 2e$, $m \rightarrow 2m$, $n \rightarrow n/2$, так что бесстолкновительно-скиновая длина остается самой собой, но называется уже лондоновской. Если исходная диссипация в плазме очень мала, то сжатие тока переводит эволюцию системы в режим (1.34) задолго до «включения» заметной неидеальности. В чем специфика этой модели?

Изменения значительны даже в простейшем варианте $n = \text{const}$. В энергии и импульсе единицы объема теперь содержатся по два слагаемых:

$$\frac{nmv^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \left(\frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{(\text{rot } \mathbf{B})^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

$$\text{и } n \left(m\mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \left(\frac{ne}{c} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \Delta \mathbf{A} - \frac{ne}{c} \mathbf{A} \right)$$

соответственно, к полевым составляющим прибавляются кинетические. На малых масштабах при $a, \delta \ll c/\omega_{pe}$ во всех формулах доминируют механические составляющие (например, заморожено $\Pi \propto \Delta B$) и инерционная ЭМГ совпадает с обычной гидродинамикой незаряженной жидкости, причем и в трехмерной геометрии тоже. B (и уж тем более A) оказывается лишь промежуточным агентом, потоковой функцией без особого отдельного физического смысла, а e вообще должно быть выкинуто. Правда, потенциальные силы между жидкими частицами такой субстанции связаны с электрическими полями, а не давлением ($\nabla\varphi$, а не ∇W), но принципиально это ничего не меняет.

Стационар у этих двух, казалось бы, разных гидродинамик вообще получается идентичным всегда, ибо сколь ни мало слагаемое с лапласианом в (1.34), только оно дает какой-то вклад в скобку Пуассона (в однородной плазме!). Правда, если масштаб течения велик, то выражения для энергии ЭМГ- и обычных течений различны, поэтому и устойчивость стационарных состояний может быть (и бывает) разной. Очень существенно, что вариант $\partial/\partial t \equiv 0$ в инерционной ЭМГ стал нетривиальным, ведь $\{B, \Delta B\}_{x,y} \neq 0$. Уже не всякий профиль $B(\mathbf{r})$ зануляет правую часть эволюционного уравнения, и отсутствие вырожденности делает привлекательными и значимыми задачи, не существующие в рамках (1.17).

Например, интерес представляет классификация стационарных решений. Оказывается, что есть всего два универсальных профиля (с функциональным произволом) с совпадающими линиями уровня B и ΔB : это прямолинейные и круговые электронные течения. Действительно, $\forall B(x)$ и $\forall B(\sqrt{x^2 + y^2})$ являются решениями стационарного варианта (1.34). В дальнейшем будет востребован и частный, но важный случай так называемых «одномасштабных» течений, качественно изображенный на рис. 1.20. В нем магнитное поле (потоковая функция) представляет собой сумму произвольного числа гармоник с произвольными амплитудами, фазами и углами поворота \mathbf{k} относительно осей координат, но единой длиной волны ($|\mathbf{k}_i| \equiv k_0$). В данном варианте все основано на том, что $\Delta B = -k_0^2 B$. Интересна аддитивность этого стационара в совершенно нелинейной задаче —

при одинаковом k_0 сумма двух решений опять-таки стационарна, хотя линии ее тока могут не иметь ничего общего со своими слагаемыми (а у тех — друг с другом).

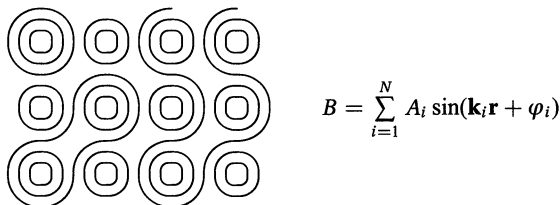


Рис. 1.20. Линии тока в одномасштабном течении

Иногда одной этой нетривиальности оказывается недостаточно, и надо делать дополнительное обобщение — учитывать ток смещения \mathbf{V}

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} nev + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

тогда в $\text{rot } \mathbf{K}$ (в его механическую составляющую) добавляется третий (второй) член $\propto \partial^2 B / \partial t^2$.

Например, одномерная (т. е. как раз с прямолинейным течением и вырожденной скобкой Пуассона) задача о бесстолкновительном скине в однородной плазме описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 B \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 B}_{\text{rot } \mathbf{K}} = 0,$$

при интегрировании по времени учтено, что в начальный момент в среде $B \equiv 0$. Без тока смещения общим решением был бы любой стационарный, никак не эволюционирующий профиль $B(x)$, т. е. при данном начальном условии поле бы никогда не попало в плазму. А так получается какая-никакая динамика. В принципе, это уравнение описывает распространение линейных (из-за вырожденности) поперечных волн с дисперсией $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$, поэтому представить себе характер проникновения довольно просто.

Резкое «включение» при $t = 0$ поля на границе порождает широкий спектр частот. Высокие гармоники с $\omega \gg \omega_{pe}$, $k \rightarrow \infty$ «не замечают» плазму и как в вакууме бегут со скоростью света. Низкие же с $\omega \leq \omega_{pe}$, $k^2 < 0$ не могут распространяться и запираются вблизи границы. Промежуточные порождают некий дребезг, связывающий обе крайности. В результате эволюции временная составляющая Π сходит на нет, и нуль вмороженной величины в среде сохраняется

в виде баланса $B - c^2/\omega_{pe}^2 \cdot d^2B/dx^2 = 0$. Точное решение записывается через интеграл от функции Бесселя

$$B = B_0 \theta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left[1 - \frac{x\omega_{pe}}{c} \int_0^{\omega_{pe} \sqrt{t^2 - x^2/c^2}} \frac{J_1(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 + x^2\omega_{pe}^2/c^2}} \right],$$

а наглядно представимо в виде

$$B_0 \exp\left(-\frac{x\omega_{pe}}{c}\right) + \dots + \boxed{\text{нечто}(x - ct)},$$

где выделены стационар ($\omega \rightarrow 0$) с мнимым k и световой «предвестник» (рис. 1.21). Убегающие гармоники не несут в себе потока Φ . Этот случай показывает резоны использования термина «бесстолкновительно-скиновая длина».

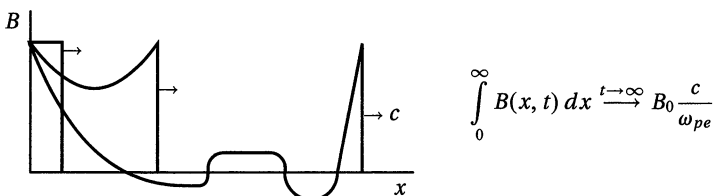


Рис. 1.21. Проникновение поля в однородную плазму

Иногда же надо принимать во внимание отклонение от квазинейтральности, причем учет тока смещения не тождествен этому, поскольку отклонение $n \neq zn_i(\mathbf{r})$ возможно и в стационаре. Вдобавок к рассуждениям из лекции 2 можно дать и такую интерпретацию причин этого: если в стандартном скин-слое «не хватает» электронов для переноса необходимого тока даже с $v = c$, то он вынужден «распухать» до

$$\sim r_B = \frac{B}{4\pi ne} > \frac{c}{\omega_{pe}} \quad \left(\text{при} \quad \frac{B^2}{8\pi} > nmc^2 \right)$$

(или «вбирать» электроны извне, повышая n и уменьшая r_B до приемлемых значений). Часто, хотя и не всегда, на самом деле это выглядит как все же инерционное c/ω_{pe} с релятивистским $\gamma \sim B^2/(nmc^2)$.

Здесь также открываются новые варианты в банальных прежде задачах. Скажем, произвольный одномерный стационарный токовый профиль $B(y)$ на заданном фоне $n_i = \text{const}$ в случае $a \gg r_B$ обеспечивается варьированием электронной скорости $v(y)$ ($\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$). В принципе, всегда можно задним числом по дивергенции холловского E

восстановить малое отклонение от квазинейтральности, но это мало интересно. Однако если (при $a \rightarrow r_B$) $v \rightarrow c$, то необходимым образом подстраивается и $n(y)$, так что теперь уравнения для магнитного и электрического ($\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$) полей

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{4\pi}{c} nev, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 4\pi e(zn_i - n), \quad v = c \frac{E}{B}$$

следует решать совместно. Общее решение

$$B^2(y) = E^2(y) - 8\pi zen_i \int_0^y E(y') dy' \quad (1.35)$$

(считая, что в «центре» течения $B(0) = E(0) = 0$) становится более содержательным, а восстановление E по B — менее тривиальным. В квазинейтральном пределе мал первый член в правой части (1.35), а в ультрарелятивистском — второй. Полезно проверить выполнение необходимого для адекватности модели дрейфа в электрическом поле условия $E < B$. Оно следует из отрицательности E — электрическое поле в электронном стационаре всегда направлено внутрь этого плоского «пинча» (цилиндрический вариант не многим сложнее), поскольку суммарные магнитные силы несомненно сжимают (пинчуют) плазму, а на ионы их действие передается через E .

Итак, в однородной плазме особых проблем с инерцией не возникает, наоборот, появляется много задач со ставшим нетривиальным законом вмороженности. Однако исходный интерес к этой области ЭМГ был связан с возможной модификацией при попадании в нее выявленных ранее законов генерации малых масштабов в неоднородной среде. К чему приводит появление новых слагаемых в этом смысле? Казалось бы, они вполне могут взять на себя роль диссипации, поскольку как и та избавляют от вмороженности магнитного поля в электроны. На самом деле это не совсем так, или даже совсем не так.

Действительно, в течениях с $(\mathbf{v}_e \nabla)n \neq 0$ необходима борьба с вмороженностью B , но возможности инерции в отсутствие диссипации несколько сужены — закон сохранения остался, только модифицировался, о нем нельзя забывать. При наличии интеграла движения эволюция системы происходит по некоторой гиперповерхности в фазовом пространстве, играющей роль «колеи», к которой привязана система-трамвай. Исчезновение рельсов позволяет двигаться с полной свободой по всем открывшимся направлениям. А их перестройка даже в случае кардинальной смены направления трассы такой возможности

не предоставляет. Сколь угодно сильная деформация гиперповерхности не отменяет ее наличия, тем более, что зачастую новая колея, попетляв по сторонам, выходит в конце концов на старую.

Силовые линии $\text{rot } \mathbf{K}$ и \mathbf{B} не отходят далеко друг от друга, электроны не способны по-настоящему сбросить лишнее или подхватить недостающее B , будучи все время связанными с ним коротким поводком в c/ω_{pe} . Максимум, что можно сделать — это отпустить его на время «погулять». Временное заимствование у механической составляющей не нарушает итогового баланса — в конце концов надо будет отдавать: банковская ссуда отличается от бабушкиного наследства. То же самое происходит и с другими законами сохранения, например, энергии. Последняя уже не выбрасывается из системы в виде тепла, а остается в ней, сохранив своей гамильтоновость, и всего лишь «перекладывается по ящикам» (из полевого — в кинетический). Эффект Холла по-старому поставляет ее избыток в малый масштаб, но поглотителя теперь здесь нет, она не изымается из оборота, а может лишь накапливаться в мелком «дребезге».

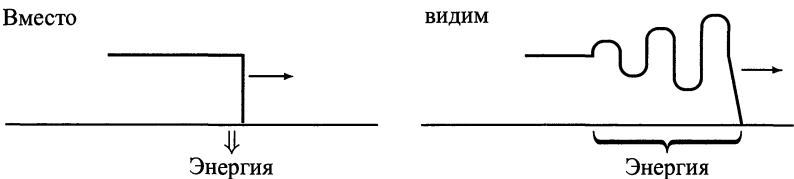


Рис. 1.22. Волна трансляции в диспергирующей среде

Гамильтоновы среды, трансформирующие энергию B^2 в «коротковолновой» области в новую ипостась, но оставляющие ее в себе, носят название диспергирующих. Одномерная волна трансляции в виде скачка, изображенного на рис. 1.14 (равно как и любая другая стационарная конструкция, связывающая B_1 с $B_2 \neq B_1$), в них невозможна. Движение фронта сопровождается выводом энергии из состояния B^2 и раскачкой мелкомасштабных осцилляций. Если бы где-то они самостоятельно плавно сходили на нет, то получалось бы, что пусть и на очень широком (область, занятая осцилляциями — все скачок) переходе, но одновременно сохраняются и «масса», и энергия в уравнении Хопфа, что полностью противоречит (1.27), при выводе которого не делалось никаких предположений о ширине скачка, а только о его постоянстве. По этой причине рождающаяся за «фронтом» болтанка занимает все возрастающую область пространства, зависящую от пройденного волной пути (рис. 1.22). Именно в этом принципиальная разница между четными и нечетными старшими производными, диссипативными и гамильтоновыми системами, упо-

минавшаяся в лекции 5. В последних высшие гармоники, продуцируемые нелинейностью, не давятся, а всего лишь выводятся из резонанса, в результате чего вместо «ударных волн» стационарно-конвективными образованиями становятся солитоны (объекты без перепада).

Опять-таки в чисто одномерных задачах выход из положения известен, и хорошо прослеживается, например, на примере бора на поверхности водного потока, регулярно всеми наблюдаемого в раковине умывальника (а особенно приметного при проходе приливной волны вверх по Амазонке). Ситуация с ним похожа на ЭМГ тем, что в отличие от обычных ударных волн в ней тоже не сохраняется энергия (тепло не включено в уравнения «мелкой воды»). Оказывается, что его структура адекватно описывается только при совместном учете диссипации и дисперсии. Если первая мала, то ширина «скачка» велика и определяется затуханием возникших из-за гамильтоновости мелкомасштабных осцилляций (так называемый турбулентный бор). Стабилизация опрокидывания обеспечивается дисперсией, а стационарность распространения — все-таки диссипацией. Естественно, в случае ЭМГ настоящие задачи двумерны, поэтому переносить подобную идеологию следует с большой осторожностью, хотя и, как показано выше, эта двумерность часто не мешает, а способствует применимости псевдоодномерных уравнений.

Очень существенна для инерционной бездиссипативной ЭМГ и проблема начального вноса: в случае $1/\sigma \neq 0$ «подхватывание» и «сброс» B происходили исключительно из-за диссипации. Теперь же начальный $\text{rot } \mathbf{K} = 0$ нулем же и остается (см. бесстолкновительный скин-эффект) — о каких волнах трансляции вообще может идти речь? Каким образом диссипация на создаваемых инерцией профилях составляет необходимое количество ротора импульса? Ответить на подобные вопросы непросто, строгих результатов в этой области мало: вследствие повышения степени производных в уравнениях математика становится существенно сложнее. Здесь также возникают дополнительные сложности с пренебрежением «перекосом» токов и нелинейностью при старших производных.

По-видимому, интегрально все выглядит по-прежнему (имеются в виду, прежде всего, крупномасштабная конвекция на неоднородностях и большие величины сопротивления), но локально отличия очень сильны. Например, в режиме ЭМГ-сопротивления при натекании тока на препятствие происходит генерация вихрей, которые забирают энергию от магнитного поля, но, как это уже указывалось выше, накапливаются в плазме, сильно модифицируя характер движения электронов. С проблемами теории приходится мириться, в конце концов даже обычная гидродинамика с точки зрения методологии пред-

ставляет собой всего лишь дискретный (и с большой скважностью) набор решенных задач.

В заключение лекции стоит обсудить еще один, более простой для аналитики вариант влияния инерции на ЭМГ-эффекты. Он связан с переходом к многокомпонентности системы, всегда вызывающей рост многообразия. На практике бывает очень существенной инерция частиц в пучках с $n_b \ll n$, стандартно применяемых в задачах инерциального синтеза. При их инжекции в плазму из-за подвижности ее электронов очень быстро происходит компенсация вносимых заряда и тока (при максвелловской релаксации за $t \sim 1/\sigma$, но бывает и $1/\omega_{pe}$) и тока. В голове пучка присутствуют и электрическое, и магнитное поля, приводящие в движение электронный компонент (\mathbf{V} за счет индукционного \mathbf{E}), а за ней — уже ни того, ни другого. Возникающая картина токов представлена на рис. 1.23. За головой устанавливается режим, в котором профили плазменного и пучкового токов полностью совпадают друг с другом, отличаясь только знаком, т. е. в области пучка $\mathbf{j}_\Sigma \equiv 0$ — в этом и заключается токовая компенсация. Упираясь в границу, \mathbf{j} растекается вдоль нее, обеспечивая экранировку среды от поля пучка и за его пределами.

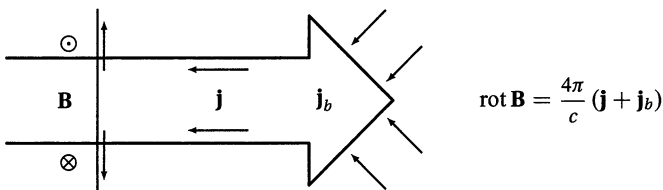


Рис. 1.23. Инжекция пучка в плазму

Если в обобщенном импульсе частиц пучка доминирует механическая составляющая: $M_b v_b \gg z_b e A / c$ или (поскольку $A \sim B r_b$, где r_b — радиус пучка) $r_b \ll \rho_{Bb}$ в собственном B , то пучок является инерционным, мало подверженным действию полей, и в первом приближении $\mathbf{j}_b(\mathbf{r})$ можно считать заданным (на самом деле его частицы совершают так называемые бетатронные колебания, описываемые в следующей лекции, а не вращаются по ларморовским окружностям, но это не меняет оценки). В этом случае его ток просто включается в виде известного дополнительного источника в уравнения Максвелла, как это и представлено на рис. 1.23, и в пренебрежении инерционностью плазменных электронов вместо (1.14) возникает

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \left[\left(\frac{c}{4\pi n e} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}_b}{n e} \right), \mathbf{B} \right] = \frac{c^2}{4\pi \sigma} \Delta \mathbf{B} + \frac{c}{\sigma} \text{rot } \mathbf{j}_b, \quad (1.36)$$

содержащее два новых эффекта.

Во-первых, появляется дополнительный внос поля (или запира-ние) через границу из-за $(\mathbf{j}_b \nabla)B$. Действительно, вследствие токовой компенсации электроны плазмы исходно после прохождения головы пучка двигаются по его току, увлекая B . Собственно, можно сказать, что инжекция пучков является удобным способом создания электронных течений без возмущения B . В результате, например, в области вхождения релятивистского электронного пучка в плазму (\mathbf{j}_b направлен навстречу пучку) возникает ЭМГ-сопротивление (ср. (1.32))

$$R \sim 30 \frac{n_b}{n} \text{ Ом} \quad \left(\langle u \rangle \approx \frac{j_b}{ne} = \frac{n_b e c}{ne} \right).$$

Во-вторых, дополнительный член в правой части (1.36) ответствен за генерацию (оно же «размораживание») магнитного поля $B \propto t$ в объеме. Энергия в этом процессе черпается из кинетической энергии пучка, поскольку в конечном счете причиной увеличения $B^2/(8\pi)$ является его торможение $(\mathbf{j}_b, \mathbf{E})$ (см. (1.28) при учете дополнительного источника в уравнениях). Фактически здесь происходит глобальное разделение токов по радиусу (полезно порисовать профиль j , отклоняющийся от j_b при таком размораживании). В этом нет ничего удивительного: антипараллельным токам вообще свойственно отталкивание. Тенденция порождает и целый класс мелкомасштабных неустойчивостей, провоцирующих разделение токов (и, стало быть, генерацию B) на размерах $l \ll r_b$, причем отнюдь не только диссипативных.

Резюмируя анализ, оба эффекта можно объединить в выводе, что магнитная компенсация — явление временное и преходящее. Либо внос через границу, либо размораживание в объеме плазмы могут достаточно быстро довести B до B_b . Возникает, правда, вопрос, почему в (1.36) учитываются столкновения плазменных электронов с собственными ионами, но не с пучком? На самом деле это вполне оправдано, если $v_b > v_{Te}$, что приводит к резкому уменьшению сечения в кулоновских столкновениях частиц пучка с электронами. В противном случае возможны варианты (см. задачу 3). С другой стороны, взаимодействие плазменных компонентов между собой может быть и аномальным.

ЗАДАЧИ

1. Найти потоковую функцию Грина ψ для инерционных электронных вихрей (см. задачу 1 из лекции 3).

Решение. В данном случае в безразмерном виде оператор $L \propto -\Delta + 1$, так что для его ФГ получается

$$(-\Delta + 1)\psi = \delta(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{k^2 + 1}.$$

Обращение этого фурье-образа дает функцию Макдональда $K_0(r)$, соответствующую «экранированному» на единичном расстоянии (c/ω_{pe} в физических переменных) логарифму. То, что $K_0|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ экспоненциально, связано с вырождением чисто магнитной эволюции в плоской геометрии. Все написанное выше относится и к вихрям в сверхпроводниках II рода (только в них размер области ненулевой завихренности, называемой керном вихря и находящейся в несверхпроводящем состоянии, мал в сравнении с лондоновской длиной). Из-за экспоненциального же спада механической составляющей обобщенного импульса на больших расстояниях в нем доминирует вектор-потенциал магнитного поля, поэтому, как это и говорилось в лекции 3, квантование интенсивности таких вихрей соответствует квантованию магнитного потока. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств

$$\oint \mathbf{K} d\mathbf{l} = \text{const} = \Gamma_0 = \pm 2\pi\hbar = -\frac{2e}{c} \oint_{L \rightarrow \infty} \mathbf{A} d\mathbf{l} = -\frac{2e}{c} \oint_{L \rightarrow \infty} \mathbf{B} d\mathbf{f} = -\frac{2e}{c} \Phi,$$

т. е. квант потока равен $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$.

2. Тонкие пленки, упомянутые в лекции 4, интересны еще и тем, что в них в силу тех же геометрических причин снято вырождение для двумерной безинерционной ЭМГ-эволюции в однородной плазме. Найти ψ для вихрей в таких пленках и убедиться в сказанном.

Решение. Уравнение для ФГ (опять-таки в безразмерном виде) здесь получается из обобщающего (1.25) закона Био-Савара:

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}' \quad \xrightarrow{J \propto [e_z, \nabla\psi]} \quad -\Delta \int \frac{\psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}' = \delta(\mathbf{r}).$$

Поскольку

$$\left[\frac{1}{r} \right]_{\mathbf{k}} = \int \frac{\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r} d^2\mathbf{r} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty J_0(kr) dr = \frac{2}{\pi k},$$

отсюда следует, что $\psi_{\mathbf{k}} \propto 1/k$, т. е. $\psi \propto 1/r$ (полезно сопоставление сменны экспоненциального убывания из предыдущей задачи на степенное в этой с дебаевским экранированием в анизотропных средах). Действительно, стандартная скобка Пуассона потоковой и вмороженной функций теперь

$$\left\{ \int \frac{B_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}', B_z(\mathbf{r}) \right\}_{x,y} \neq 0,$$

но обращается в ноль на указанных в лекции линейных, круговых и одно-масштабных (почему?) течениях, что служит еще одним доказательством единства поведения вихрей различной физической природы (в разных гидродинамиках). Как выглядит ФГ при учете инерции (так называемые перловские вихри в сверхпроводящих пленках)?

3. Как связана формула (1.35) с соотношением, выписанном в задаче 4 из первой лекции для импульсного баланса электромагнитного поля со своими источниками?

Решение. Она является ее прямым следствием. Действительно, в данном случае из двух зарядово-токовых источников один (электроны) не обладает инерцией и не способен воспринять импульс поля (находится в силовом балансе $ne[\mathbf{v}_e, \mathbf{B}]/c + ne\mathbf{E} \equiv 0$), а другой (ионы) неподвижен и участвует в обмене только за счет своей ρ , поэтому в стационаре в указанной плоской геометрии закон сохранения импульса из той четвертой задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B^2}{8\pi} - \frac{E^2}{8\pi} \right) = -zen_i E,$$

а это и есть (1.35).

4. Как меняется характер объемного размораживания токов при учете столкновений электронов плазмы с частицами пучка?

Решение. Трение о пучок надо аддитивно добавить в динамическое электронное уравнение (ср. (1.10)):

$$0 = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \frac{m\mathbf{v}}{\tau_{ei}} - \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b)}{\tau_{eb}},$$

где \mathbf{v} — скорость электронов (ионы неподвижны). В случае $v_{Te} \gg v_b$ при кулоновских столкновениях $\tau_{eb} = \tau_{ei} z^2 n_i / (z_b^2 n_b)$, следовательно в законе Ома происходит замена

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \rightarrow \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \left(1 + \frac{z_b^2 n_b}{z^2 n_i} \right) + \frac{\mathbf{j}_b z_b}{\sigma z}.$$

Таким образом, в обычном случае $n_b \ll n_i$ у генерирующего члена в (1.36) появляется множитель $(1 - z_b/z)$, т. е. при прохождении, например, пучка протонов через водородную плазму эффект размораживания в первом приближении в гидродинамике отсутствует.

ЛЕКЦИЯ 8

Генерация пучков в диодах, релятивизм. Пучки в плазме, соотношение кинетических и полевых составляющих энергии и импульса частиц. Дрейфовое движение в сильноточном пучке, кинетика. Диффузные и скинированные пучки-пинчи. Усиление взаимодействия со средой.

Уместно продолжить изучение пучков с вопроса о том, в каком виде они создаются и проходят через плазму. Всегда ли их частицы действительно движутся по инерции, почти не подвергаясь воздействию собственных полей? Начать стоит с их генерации — какие характеристики им присущи по рождению? Ответ дает качественная модель стандартного пучкового производителя-диода, представляющего собой две параллельные пластины линейного размера R (для оценок безразлично, какой формы, но круглые с таким радиусом симметричнее), расположенные на расстоянии $d \ll R$ друг от друга, на которые подано напряжение U . Для частиц, движущихся в зазоре в обычном и ультрарелятивистском случае, имеют место простые соотношения (для определенности формулы пишутся для электронов, идущих от катода к аноду)

$$eU = \frac{mv^2}{2} \sqrt{\gamma mc^2} \rightarrow v \sim \sqrt{\frac{eU}{m}} \sqrt{c} \quad (1.37)$$

(в пренебрежении их начальной энергией). К ним следует добавить уравнение Пуассона, связывающее концентрацию генерируемого пучка с напряжением же

$$ne \sim \frac{E}{d} \sim \frac{U}{d^2}. \quad (1.38)$$

Строго говоря, (1.38) справедливо лишь в отсутствие ограничений на инжекцию частиц с катода (или анода для ионного диода), т. е. представляет собой максимум возможного значения n , легко достигаемый для плазменных (взрывающихся при подаче U или специально формируемых) электродов.

Эти формулы часто объединяют и записывают в виде хорошо запоминаемого «диодного скейлинга»:

$$d \sim r_{De} = \frac{v}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{c}{\omega_{pe}}}$$

(по-прежнему, при обычных и ультрарелятивистских U , в последнем случае с учетом $m \rightarrow \gamma m$). Он очень естественен, поскольку диод

заполнен заряженной плазмой с нарушенной квазинейтральностью. Можно объединить и по принципу трансформации энергии

$$E^2 \sim nmv^2 \sqrt{\gamma mc^2},$$

подчеркивая, что диоды — это машины, преобразующие энергию электрического поля в кинэнергию пучка. Выписанные закономерности вполне универсальны, дальше начинаются различия. Оказывается, что данное устройство может работать в двух принципиально разных режимах, чья специфика связана с природой сил, определяющих движение частиц.

Если, как это всегда имеет место для зарядов в вакууме в отсутствие внешних полей в безэлектродной задаче, в воздействии на электроны доминируют электрические силы, то при данном аспектном соотношении R и d движение частиц перпендикулярно электродам и одномерно. Тогда диодный ток пропорционален площади электродов, т. е. просто

$$I \sim nev \cdot R^2.$$

Использование (1.37) для v и (1.38) для n дает искомое выражение для генерируемого тока пучка

$$I \sim U \sqrt{\frac{eU R^2}{m d^2}} \sqrt{\gamma \frac{mc^3 R^2}{e d^2}}. \quad (1.39)$$

Это знаменитый «закон 3/2» (в нерелятивизме), характерный для так называемого лентгмюровского диода. Как известно, в силу простоты движения частиц для него существует и точное решение (см. задачу 1). Видно, что увеличение R приводит к желательному для практики эффективному наращиванию I , однако злоупотребление возможностями выводит диод из данного рабочего режима.

Действительно, согласно закону Ампера $B \sim I/(cR)$, т. е. магнитные силы в одномерном диоде растут $\propto R$. Рано или поздно (а именно, при $R/d \sim (c/v)^2$) они сравниваются с электрическими, и движение частиц становится двумерным. В новых обстоятельствах возникает и дополнительный скейлинг, следующий из требования того, чтобы крайние, находящиеся под максимальным воздействием B электроны, заворачиваясь в магнитном поле, все же попадали на анод

$$d \sim \rho_{Be} = \frac{v}{\omega_{Be}} \rightarrow B \sim \frac{mcv}{ed}$$

(в общем случае опять-таки с учетом γ). Стандартно именно его используют для оценки эффективности генерации в таком режиме, хотя

существуют и другие возможности, см. задачу 2. На традиционном пути учет (1.37) теперь порождает формулу

$$I \sim \frac{mc^2}{e} \sqrt{\frac{eU}{m}} \frac{R}{d} \sqrt{\gamma} \frac{mc^3}{e} \frac{R}{d}. \quad (1.40)$$

Ответ выглядит так, как будто вклад в генерируемый ток дает площадь $2\pi R d$ (по этой причине иногда говорят об «эффективном кольце»). На самом же деле в зазоре просто вместо ускоренного движения перпендикулярно электродам происходит ортогональный ему дрейф в скрещенных полях (рис. 1.24) и на анод электроны попадают только в области размером $\sim \rho_{Be}$, где дрейфовое приближение не работает. Такой диод называется уже сильноточным. Здесь в силу, наоборот, сложности траекторий электронов полное аналитическое решение отсутствует.

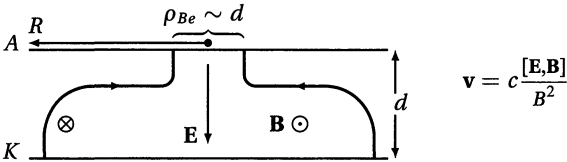


Рис. 1.24. Движение частиц в сильноточном диоде

Возникающую в (1.39), (1.40) одинаковую комбинацию мировых констант удобно называть *током Альфвена*: $I_A = mc^3/e \sim 17$ кА (электронным). Иногда в его определение добавляют малоуниверсальные релятивистские множители $\beta\gamma$ (в этой лекции $\beta = v/c!$). Для практических приложений очень важен вопрос, какое из ограничений — электрическое или магнитное — на генерируемый ток наступает раньше? Из выписанной выше оценки критического аспектного отношения видно, что при релятивизме движения — всегда второе, обеспечивающее меньшую эффективность пучкового производства. Причины можно пояснить следующим рассуждением: хотя в безграничном вакууме для собственных полей всегда $E > B$, вследствие наличия хорошо проводящих электродов ситуация (даже просто геометрически) меняется: поскольку E «наращивается» на масштабе d , а $B — R$, то при $v \sim c$ в случае движения перпендикулярно электродам в рамках (1.39) было бы $E/B \sim d/R$. На самом деле закон (1.40) соответствует $E/B \sim v/c$ (что полезно проверить) и, как уже сказано выше, почти продольному дрейфовому сносу. Рожденный в таком режиме пучок отнюдь не демонстрирует благостной прямолинейной картины инерционного распространения. Электронные пучки для УТС всегда создавались в сильноточных диодах, но даже и у нерелятивистских пучков легких ионов влияние магнитных полей было заметным.

Теперь можно и посмотреть, как пучки на самом деле распространяются через плазму. Из прошлой лекции следует, что электрическая компенсация в среде долга, а магнитная преходяща, поэтому в обязательном порядке следует учесть влияние собственного B на движение частиц. Даже при доминировании продольного движения $v_z \gg v_\perp$ (в этой лекции подразумевается цилиндрическая геометрия пучков), траектории электронов (по-прежнему для определенности) не идеально прямолинейны из-за воздействия силы Лоренца. Однако если ларморовский радиус $\rho_{Be} \sim mc v_z / (eB)$ велик по сравнению с радиусом пучка R , то угол разворота частиц пучка мал — они двигаются в неоднородном $B(r)$, и задолго до приобретения $v_\perp \sim v_z$ оказываются в поле другого знака и начинают вращаться уже в другую сторону. В результате их траектории напоминают синусоиду (рис. 1.25).

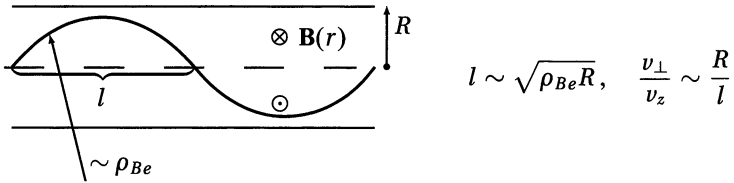


Рис. 1.25. Бетатронные колебания

Именно такое движение и носит название бетатронных колебаний. Их «полуволна» l представляет собой, грубо говоря, хорду, стягивающую сегмент малой высоты R большой окружности ρ_{Be} . Для таких инерционных пучков из простейших геометрических соображений (рис. 1.25) и закона Ампера

$$R \sim \left(\frac{v_\perp}{v_z} \right)^2 \rho_{Be}, \quad \frac{n_b e v_z}{c} \sim \frac{B}{R}$$

следует ключевое соотношение

$$B^2 \sim n_b m \langle v_\perp^2 \rangle = P_b,$$

т.е. в стационарном пучке в плазме на самом деле наличествует баланс давлений, и фактически в лице этого объекта плазменщики имеют дело с равновесным z -пинчем — на длинах, существенно превышающих бетатронный период — и считать их профиль «заданным», строго говоря, хорошо лишь при не превосходящем l удалении от границы плазмы. Разумеется, силовой баланс в равновесном состоянии ничуть не удивителен.

Для дальнейшего важна универсальность параметра иерархичности между инерционными и полевыми составляющими интегралов

движения электронов в таких продольных пучках. Действительно, воспользовавшись тем, что $v \approx v_z$, легко показать, что соотношения

$$\frac{n_b m v^2}{2} \quad \nu S \quad \frac{B^2}{8\pi} \quad \vee \quad m v \quad \nu S \quad \frac{e}{c} A$$

(при релятивизме везде $m \rightarrow \gamma m$, $v \rightarrow c$) эквивалентны

$$\beta \gamma I_A \quad \nu S \quad I$$

(поэтому иногда и включают неуниверсальные множители в определение альфвеновского тока). Точно таково же исходное соотношение $\rho_{Be} \nu S R$. Насколько же эффективны «продольные» инерционные пучки с точки зрения УТС-приложений?

Для электронов левая часть совершенно ничтожна, для, например, ускоренных до 10 МэВ однократно ионизованных ионов Li составляет всего ~ 10 МА (маловато), и лишь для тяжелоионного УТС запас инерционности очень хорош. С повышением же тока до требуемых величин пучки становятся сильноточными в смысле существенности магнитного самовоздействия при транспортировке, в них нет и не может быть «продольности» движения (уже $v_{\perp} \gg v_z$). Они представляют собой как бы горячий «газ» (вся энергия сосредоточена в тепле $m v_{\perp}^2$) или ток (в B^2). Нет ли, однако, здесь противоречия с предыдущим анализом, использовавшим противоположные неравенства? Существуют ли вообще такие конфигурации?

Очевидно, что адекватным строгим языком описания новых объектов может быть только кинетика — частицы пучка бесстолкновительны и обладают огромной энергией хаотического движения. Для простых оценок, тем не менее, вполне достаточно грубого гидродинамического подхода. Фактически эти оценки основаны на модели ЭМГ с давлением. Из дрейфового характера течения и того же закона Ампера

$$v_z \sim v_{\perp} \frac{\rho_{Be}}{R}, \quad B \sim \frac{I}{cR}$$

(но теперь уже $\rho_{Be} \sim m c v_{\perp} / e B$!) следует замечательная формула

$$I \sim I_A \frac{\langle v_{\perp}^2 \rangle}{c v_z}. \quad (1.41)$$

Она же возникает и при одновременном учете как $I \sim n_b e v_z R^2$, так и $B^2 \sim n_b m \langle v_{\perp}^2 \rangle$ (см. задачу 3).

В нерелятивистском пределе (1.41) не дает сколько-нибудь существенных ограничений на ток пучка. Но в противоположном варианте ультрарелятивистского движения, очевидно, $\langle v_{\perp}^2 \rangle \rightarrow \gamma c^2$, $v_z \rightarrow c$ и все возвращается к недостаточности подобных параметров по крайней

мере для электронов (если только не обеспечить в принудительном порядке малость v_z/c , что непросто само по себе и не всегда хорошо при транспортировке на большие расстояния). Что можно сделать в таком случае?

Гидродинамика уже была использована по максимуму, и для ответа на этот вопрос требуется все же хотя и качественный, но учет кинетических тонкостей. Как упоминалось во вводной первой лекции, в равновесной кинетике функция распределения частиц пучка зависит от интегралов движения, диктуемых симметрией задачи (однородностью по t и z)

$$f = f(K_z, E), \quad K_z = p_z - \frac{e}{c} A_z, \quad E = \gamma mc^2 - e\varphi$$

(здесь E опять энергия, а не электрическое поле). Иногда учитывают и K_θ — канонический импульс, сопряженный к угловой координате и являющийся моментом вращения вокруг оси z цилиндрической системы. Задавшись каким-либо конкретным видом f , можно, интегрируя по $d^3\mathbf{p}$, вычислить \mathbf{j}_b (в общем случае и ρ_b тоже) как функцию потенциалов электромагнитного поля, а затем получить и самосоглаванное решение уравнений Максвелла с источниками. В данном случае речь идет о ситуации с нулевым электрическим полем, но это не сильно упрощает задачу. Естественно, этой героической цели удастся достичь лишь для очень бедного набора f , но и его вполне хватает (не говоря уже о численном эксперименте) для представления об общих закономерностях кинетических равновесий. Оказывается, что существуют два предельных случая пучков-пинчей, схематично изображенных на рис. 1.26. Первый вариант имеет место в случае

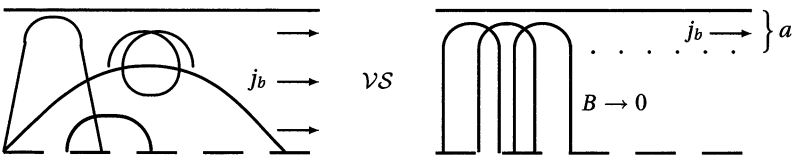


Рис. 1.26. Специфика равновесий Беннета и Хаммера–Ростокера

хорошего разброса значений E и K_z у частиц или «широких» функций распределения типа максвелловской. Ее релятивистский аналог как раз и позволяет решить задачу до конца, описывая так называемое *равновесие Беннета*. Оно вполне аналогично самому себе из теории обычных пинчей — столкновения не препятствуют, а способствуют максвеллизации f . Специфику можно понять из самого факта большого разброса параметров: траектории отдельных частиц являют полный разброд и разнообразие (рис. 1.26), в любой точке внутри пучка при-

существуют электроны с довольно произвольными по величине и направлению скоростями, что неизбежно приводит к плавному распределению тока и поля в пучке, а также размытым, так называемым диффузным границам пинча. Ясно, что гидродинамическая модель (1.41) применима как раз к таким объектам, и точное решение подтверждает ее качественные выводы об ограничении тока равновесного релятивистского пучка на уровне $I \sim \gamma I_A$. Беннетовский пучок выглядит как совокупность диодов с $R \sim d \sim \rho_{Vb}$ и без электрического поля.

Другой пример поставляют «узкие» распределения. В случае предельной монохроматичности, когда f представима в виде произведения δ -функций, аналитические выкладки снова проводятся до конца, и соответствующее состояние носит собственное имя *равновесия Хаммера–Ростокера*. Оно может реализовываться только в отсутствие столкновений пучковых электронов с чем-либо. Находящиеся в одной точке частицы ничем не отличаются друг от друга, да и в разных имеют жестко связанные через единые энергию и обобщенный импульс параметры. Здесь нет никакого разнообразия, в системе фактически присутствует только одна траектория (с точностью до сдвига по оси z) (см. рис. 1.26). Частицы осуществляют одновременный поворот в строю. В результате пространственной когерентности оказывается возможным эффект как бы скинирования тока и поля на знакомом малом масштабе $a \sim c/\omega_{pb} \ll R$ (совпадающем из-за баланса давлений с лармором). Внутри пучка движение электронов чисто перпендикулярно, синхронный поворот в приграничном V порождает v_z и согласованный j_b , обеспечивая заодно и резкие границы бесстолкновительного пинча.

Теперь вместо дрейфовости к амперову закону добавляется соотношение $\rho_{Ve} \sim a$ (и, стало быть, в области ненулевого тока $v_z \sim v_{\perp} \approx c$), что трансформирует (1.41) в

$$I \sim \gamma I_A \frac{R}{a} \gg \gamma I_A. \quad (1.42)$$

В принципе, эту же формулу можно получить все же и из гидродинамических оценок, следует лишь к старому балансу давлений $n_b \gamma m c^2 \sim B^2$ добавить новый факт скинирования $I \sim n_b e c R a$ (ср. задачу 3), или вообще подставить в (1.41) «усредненное по площади» значение v_z . Сама возможность скинирования, столь способствующая обходу неприятного ограничения, однако, выявляется лишь в кинетике. Интересно, что в результате суммарная кинетическая энергия такого монохроматического пучка («тепловая», а не направленная), несмотря на равновесие сил, может быть много больше магнитной — если он распространяется по достаточно узкому коаксиалу, то объем, занимаемый полем, будет мал.

Преодоление в R/a раз несколько мистического (формально — см. (1.41) — любое дрейфовое движение частиц в плазме создает ток, больший $\beta\gamma I_A$ альфвеновского предела, связанного с разворотом частиц пучка в собственном магнитном поле $\rho_{Be} < R$, в «трубчатой» конструкции имеет чисто геометрическую природу. За счет «сворачивания» в цилиндр плоского тока с линейной плотностью $J \approx ja \sim cB$ и $a \sim \rho_{Be}$ можно набирать сколь угодно большие $I \sim JR$. Просто монохроматичность позволяет организовать такую конфигурацию естественным путем, в беннетовском же варианте токовая «труба» должна быть полый и по n_b (из-за обязательного присутствия в области $n_b \neq 0$ направленной v_z , см. выше), чего, впрочем, можно добиться без нарушения баланса давлений, «нанизав» ее на аксиальный провод с противоположным током. Возможны также попытки снятия (1.41) за счет введения в игру противодействующего магнитному сжатию электрического расталкивания при частичном зарядовом разбалансе (что требует $n \sim n_b$), но гораздо эффективней игра на хорошей магнитной компенсации с $I_\Sigma \ll I_b$: в конце концов, в инерциальном УТС время инъекции пучков вполне ограничено.

Как и всякая особенность реальной жизни, существенная поперечность движения частиц в пучке, мешающая транспортировке, в определенных обстоятельствах играет и благоприятную роль — их эффективный пробег в среде резко возрастает, и взаимодействие (например, энерговклад) увеличивается. Действительно, при зигзагообразных траекториях, представленных на рис. 1.26 справа, реальный путь частиц в «мишени» L может намного превышать ее толщину l :

$$\frac{L}{l} \sim \frac{\langle v_\perp \rangle}{\langle v_z \rangle} \sim \frac{I}{I_A \gamma}.$$

Что ж, на этой оптимистичной ноте можно считать знакомство с моделью ЭМГ завершенным. Усвоенные представления о конвективном сносе поля будут далее использованы для анализа переноса других субстанций в других течениях, причем окажется, что многие универсальные закономерности уже были затронуты на оставляемом казалось бы частном уровне.

ЗАДАЧИ

1. Найти точное распределение потенциала в электронном ленгмюровском диоде.

Решение. В указанных в лекции приближениях стационарная работа диода описывается нерелятивистскими уравнениями

$$nev = |j| = j_0 = \text{const}, \quad \frac{mv^2}{2} - eU = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi ne,$$

дополненными граничными условиями ($x_K = 0, x_A = d$)

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(d) = U, \quad \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

(последнее условие, строго говоря, «внешнее» по отношению к системе и возникающее из рассмотрения эмиссии из катода, соответствует 100% экранировке поля электронным облаком в зазоре). Выражая концентрацию и скорость электронов через потенциал из первых двух уравнений и подставляя их в третье, можно последовательно записать

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi j_0 \sqrt{\frac{m}{2e\varphi}} &\rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 16\pi j_0 \sqrt{\frac{m\varphi}{2e}} \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi = \left(\frac{91\pi^2 j_0^2 m}{2e}\right)^{1/3} x^{4/3}. \end{aligned}$$

Оказывается, что коэффициент в импедансе (т. е. в отношении U/I) ленточного диода, оцененном в тексте, равен $9\pi/\sqrt{2} \approx 20$, что может неприятно разочаровать в точности буквенных прикидок, однако удержание в лекционных формулах 4π из уравнения Пуассона (физически важного телесного угла) возвращает все к ~ 1 — вообще, подобные множители (в связях с источниками, в плотности электромагнитной энергии и пр.) стоит учитывать в оценках, недаром они включены в физические величины в так называемых «практических» системах единиц. При сущности релятивизма ответ может быть записан лишь в квадратурах, а в ультрарелятивистском режиме (если бы одномерная модель была к нему применима) было бы $\varphi = (2\pi j_0/c)x^2$.

2. Исходя из определения магнитного дебаевского радиуса, можно ожидать, что релятивистский сильноточный диод имеет еще и скейлинг $d \sim r_B$. Так ли это?

Решение. Да, при учете (1.39) это соотношение является прямым следствием (1.40) — или, наоборот, вкупе с (1.39) порождает закон (1.40):

$$\frac{B}{ne} \sim d \rightarrow B \sim \frac{\gamma mc^2}{ed} \rightarrow I \sim \gamma I_A \frac{R}{d}.$$

Но самый короткий его вывод получается все же из баланса $B \sim E$:

$$\frac{I}{cR} \sim \frac{\gamma mc^2}{ed} \rightarrow I \sim \gamma I_A \frac{R}{d}.$$

3. Получить формулу (1.41) из комбинации

$$I \sim n_b e v_z R^2 \quad \text{и} \quad B^2 \sim n_b m \langle v_{\perp}^2 \rangle.$$

Решение. Для этого достаточно подставить во второе соотношение $B \sim I/(cR)$ и поделить его на первое.

ЛЕКЦИЯ 9

Специфика турбулентного конвективного переноса. Стационарный двумерный случай и «затравочная» диффузия. Две теоремы и понятие эффективной диффузии. Три точно решаемые модели. Общий одно-масштабный случай, фракталы.

Переход к общей проблематике стоит начать с философского вступления. Задача о турбулентной конвекции, т. е. переносе в случайных иррегулярных течениях, одновременно и важна, и докучлива. С одной стороны, ее решение представляет огромную ценность, с другой — продвижение дается большим напряжением сил, зачастую разочарующе неадекватным полученным результатам. Уместно используемое и далее сравнение с форсированием болота — весь в мыле и грязи, а прошел-то всего ничего, или вообще завяз. Проблемы теории связаны со сложностью и неуниверсальностью явления. В отличие от тщательно разработанной модели так называемой «слабой» турбулентности, нам до сих пор не ясна даже первичная задача об «устройстве» ее гидродинамического собрата — как же можно говорить о последствиях? С другой стороны, анализ достигнутого (см. ниже) свидетельствует о существовании множества качественно разных режимов переноса, характеризующихся собственными параметрами *ad hoc*, никак не переносимыми друг на друга. Если одна группа процессов описывается в терминах веса, а другая — длины, стоит ли их объединять? Притягательность же тематики зиждется на большой величине эффекта и его повседневности. Конвективный транспорт намного эффективней продуцируемых той же слабой или волновой турбулентностью аномальных переносов, ибо в потоке частицы двигаются в выделенном направлении, а в периодической волне в основном топчутся на месте. Встречается же этот транспорт в жизни каждодневно и в самых разных обличьях: например, именно он определяет вентиляцию и обогрев батареями наших квартир, или распространение загрязнений при природных и техногенных катастрофах.

В многолетнем и многолюдном натиске на проблему исследователями используются очень сложные и изысканные теорфизические методы, как пришедшие со стороны, так и развитые именно здесь. Техническая громоздкость инструментария провоцирует сильное абстрагирование и модельность в постановке решаемых задач, вплоть до потери реальности в получаемых ответах. Не сбиться с маршрута позволяют базовые представления о физических ситуациях, возможностях и ограничениях тех или иных подходов. Замечательным является то обстоятельство, что эти представления не только пассивно

не дают сойти с физической дороги, но и действительно продвигают по ней. Как будет видно из дальнейшего, адекватный язык и простейшая классификация явлений уже обеспечивают значительный прогресс в понимании сути вещей.

Выберем для знакомства с областью частный, но частый случай, отличающийся относительно хорошей аналитической разработкой — транспорт *пассивного скаляра*:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0 \quad \xrightarrow{\operatorname{div} \mathbf{v}=0} \quad \frac{dn}{dt} = 0. \quad (1.43)$$

Скалярность заключается в описании переносимой субстанции плотностью n , а пассивность — в ее абсолютной подчиненности (скажем, массивные частицы могли бы «отставать» из-за инерции) движению среды и в отсутствии обратного влияния процесса на поле скоростей: в (1.43) $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ считается заданным извне (например, из экспериментальных наблюдений или первичной теории турбулентности). Поскольку турбулентность мыслится как хаотическое понятие, эволюцию в рамках данного уравнения следует рассматривать в терминах каких-то средних характеристик течения. Прimitив в духе сноса по реке $l \sim \langle v \rangle t$ здесь как правило не проходит, поскольку в отсутствие сквозняков $\langle v \rangle \equiv 0$. Необходимо более тонкое усреднение, и, собственно, задачей и целью теории является вывод на базе (1.43) эффективных «усредненных» по каким-то пространственным и/или временным масштабам уравнений, адекватных тому или иному режиму турбулентности и не перегруженных «детальями» $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Ключевой вопрос, ответ на который следует держать перед природой и физикой, в этих изысканиях таков: «Какой процесс обеспечивает переход от исходной регулярности к конечной стохастичности системы?» Действительно, (1.43) само по себе динамично и безэнтропийно. Формально оно элементарно интегрируется по характеристикам, вот только пользы от этой процедуры немного — движение частиц скаляра в поле скоростей среды сложно и неустойчиво, малые ошибки в начальных условиях при эволюции экспоненциально нарастают, исходно близкие траектории разбегаются. Искомые эффективные уравнения оперируют устойчивыми и грубыми характеристиками течения, но кто сказал, что этих удобных для теории характеристик достаточно для описания реальной динамики? В чем, собственно, заключается стохастичность \mathbf{v} ? Откуда берутся упрощающие жизнь вероятностные законы, кто или что бросает кости? Если внутреннее обеспечение хаотичности в системе отсутствует, то надежды на эффективность «усреднительного» подхода тщетны и опасны, и это обстоятельство также нужно постоянно держать в голове.

Между прочим, понимание проблем переноса ценно и для других областей физики. Оно, например, способствует развитию «первичной» теории турбулентности, ставя задачи перед ней (что зачастую приятнее, чем решать свои): вычленив определяющие транспорт характеристики процесса, можно стимулировать целенаправленное определение именно их, без углубления в другие тонкости. Вообще, через постижение сложной и зыбкой области турбулентности красной нитью проходят гибкость подходов и готовность к обоснованной смене приоритетов. Вследствие внутренне присущей явлению неуниверсальности здесь отсутствуют магистральные пути движения, приходится как в болоте прыгать с кочки решенной задачи на кочку другой, и при обнаружении непроходимого (но действительно непроходимого!) участка следует бросить старые цели и методы и сменить направление маршрута. Дальнейшее изложение идет по спирали: выбор парадигмы \Rightarrow проблемы простые \Rightarrow сложные \Rightarrow непреодолимые \Rightarrow пути обхода \Rightarrow новая парадигма.

Стационарные двумерные течения

Начать изучение турбулентного транспорта пассивного скаляра стоит с данного простейшего варианта. Его простота не безобидна, она требует модификации исходного (1.43), модель нуждается в учете *затравочной диффузии* (этимология прояснится далее) — для возможности смены частицами n своих динамических траекторий, совпадающих здесь с линиями тока. Без нее в системе отсутствует стохастика, движение интегрируемо и регулярно. Действительно, двумерное векторное поле топологически примитивно и отнюдь не хаотично. Оно всегда представимо в «клебщевом» виде:

$$\forall \mathbf{v}(x, y) \in \{v_x, v_y\} \quad \exists \lambda(x, y), \mu(x, y) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \lambda[\nabla\mu, \mathbf{e}_z]$$

(иногда говорят, что двумерное уравнение силовых линий

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

всегда имеет «интегрирующий множитель»), следовательно линии тока (траектории частиц скаляра) совпадают с изолиниями «горного рельефа» какой-то функции $\mu(\mathbf{r})$. Эти одномерные объекты хорошо делят двумерное пространство, и исходно находящиеся внутри (снаружи) замкнутой линии (например, вблизи локального максимума или минимума μ — у вершины или дна ямы в горной стране) частицы никогда не попадут «на другую сторону». Их поведение глубоко индивидуально, никакое усреднение к ним не применимо.

Введение в правую часть (1.43) диффузионного члена приводит к благотворному для усреднительного подхода перемешиванию n : диффузия является истинно случайным процессом с внутренней игрой в кости. Теперь в основном разбираемом случае бездивергентного течения, соответствующем в клебшевом представлении знакомому по лекции 3 варианту $\lambda = 1$, $\mu = \Psi$, базовое уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \{n, \Psi\}_{x,y} = D \Delta n. \quad (1.44)$$

Иерархию конвекции и диффузии в описываемых им процессах устанавливает безразмерный параметр $\Psi/D = P$, называемый числом Пеклэ (не путать с давлением), и именно он является естественной характеристикой переноса в данном варианте. Понятно, что особенно интересен случай с $P \gg 1$, как это обычно и бывает на практике: например, для воздуха при нормальных условиях затравочная (она же молекулярная) диффузия $D \sim 1 \text{ см}^2/\text{с}$, тогда как Ψ как минимум на несколько порядков больше. Если бы транспорт скаляра определялся D , то он был бы чрезвычайно медленным, например, запах от разбитой склянки с духами в одном углу комнаты доходил бы до другого (скажем, на 5 м) часов за 12.

Нетрудно заметить полную аналогию (1.44) с уже привычным базовым уравнением ЭМГ в плоской геометрии и в сильном внешнем поле, где, оказывается, под личиной скаляра скрывается единственная компонента вектора \mathbf{V} . Взаимное соответствие $n \leftrightarrow \hat{V}_z$, $P \leftrightarrow \beta$, $\Psi \leftrightarrow V_0/n$ стирает грани между моделями, позволяя безболезненно переносить решенные задачи из одной области в другую.

Прежде чем приступить к оперированию с (1.44) в конкретных вариантах, полезно выявить общие закономерности процесса. Приятно начать решать сложную задачу со строгого доказательства очевидных вещей (на самом деле главное в таком подходе — последующая работа с результатом). Существует простая *теорема о возрастании потока* за счет конвективного перемешивания (Я. Б. Зельдович), по используемой в доказательстве технике являющаяся аналогом так называемых теорем взаимности. Представим себе происходящий в некоей среде транспорт n , описываемый (1.44) и вызванный погружением в нее источника и стока пассивной субстанции, задающих перепад концентрации $n_1 - n_2$ (рис. 1.27). Тогда в стационаре $\partial n/\partial t \equiv 0$ плотность потока $\mathbf{q} = n\mathbf{v} - D\nabla n$ удовлетворяет соотношению $\text{div } \mathbf{q} = 0$. Для формулировки теоремы следует умножить эту \mathbf{q} на $-\nabla n$ и проинтегрировать по всему пространству, занятому средой, в общем виде

(ср. задачу 3 из шестой лекции)

$$-\int \mathbf{q} \cdot \nabla n \, dV = \mathcal{I} = -\int \operatorname{div} n \mathbf{q} \, dV = -\int_{\text{И}} n(\mathbf{q}, d\mathbf{f}) - \int_{\text{С}} n(\mathbf{q}, d\mathbf{f}) = Q(n_1 - n_2)$$

(здесь введено обозначение Q для суммарного потока скаляра), и с учетом конкретного выражения для \mathbf{q} :

$$\mathcal{I} = \int (-n\mathbf{v} + D\nabla n) \nabla n \, dV = \int D(\nabla n)^2 \, dV.$$

В последнем случае принято во внимание, что для несжимаемого течения

$$-\int n(\mathbf{v}, \nabla n) \, dV = -\int \left(\mathbf{v}, \nabla \frac{n^2}{2} \right) dV = -\int \operatorname{div} \frac{n^2 \mathbf{v}}{2} \, dV = 0,$$

поскольку значения $n_{1,2}$ на поверхностях источника и стока фиксированы, и никакого дополнительного (по сравнению с $\mathbf{v} \equiv 0$) конвективного вноса/выноса через них не предполагается (такое увеличение было бы чересчур просто), а гидродинамический транспорт идет только в объеме.

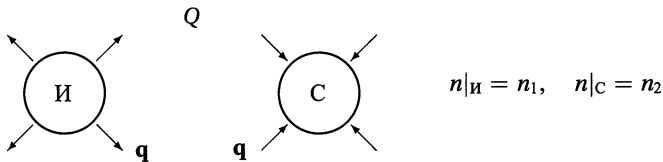


Рис. 1.27. К теореме об увеличении потока

В возникшей формуле

$$Q(n_1 - n_2) = \int D(\nabla n)^2 \, dV \quad (1.45)$$

интеграл минимален в отсутствие течения, поскольку необходимое и здесь достаточное —

$$\mathcal{I}[n + \delta n] - \mathcal{I}[n] = 2D \int \nabla n \nabla \delta n \, dV + D \int (\nabla \delta n)^2 \, dV > -2D \int \delta n \Delta n \, dV$$

($\delta n_{1,2} = 0$) — обращение в 0 его первой вариации происходит при $\Delta n = 0$, что совпадает с $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ только если $\mathbf{v} \equiv 0$. Отсюда и следует искомое — «включение» конвекции при неизменных источнике и стоке в обязательном порядке увеличивает Q (ср. с ЭМГ-сопротивлением).

Результат, конечно, представляется банальным, но его анализ весьма полезен для дальнейшего. Какие ограничения были существенны для вывода? Очевидно, двумерность не относится к таковым, вариант с 3-d совершенно идентичен разобранным. Более того, на самом деле рост потока есть и при $\partial/\partial t \neq 0$ (см. следующую теорему). А вот наличие затравочной диффузии и несжимаемость поля скоростей чрезвычайно важны. При $D = 0$ из (1.45) следует отсутствие перепада n в потоке, что несомненно связано с условием $\text{div } \mathbf{v} = 0$, но, вообще говоря, $Q \not\propto D$, поскольку ∇n в задаче определяется самоогласованно, установившийся профиль концентрации зависит от D (или P , см. ниже). Зависимость/независимость транспортного потока от $n_1 - n_2$ весьма примечательна и информативна, она разделяет чисто конвективный перенос в некоей «трубе», когда элементы скаляра подхватываются течением и доставляются в пункт назначения вне зависимости от значений концентрации в других местах, и диффузионный транспорт, связанный с «наперсточной» перестановкой этих элементов и посему идущий только при наличии неоднородности n .

Что ж, уже говорилось, что любой точный результат — кочка на болоте общей теории. Получив его, следует озаботиться конструктивным ответом на вопрос: «Чему научились?» (в смысле — «На что надеяться далее?»). Итак, в данном случае речь идет о стохастическом переносе за счет перепада концентрации. В стандартных курсах математики в качестве языка описания таких процессов приводят исключительно уравнение диффузии, поэтому можно высказать гипотезу, что при усреднении (1.44), буде его удастся осуществить, в ответе ожидается

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = D_{\text{eff}} \Delta \langle n \rangle,$$

причем $D_{\text{eff}} \gg D$ при $P \gg 1$. Иными словами, хаотическая конвекция в двумерных несжимаемых (вихревых) стационарных течениях по природе своей диффузионна, причем универсализация макроскопического поведения возникает исключительно благодаря микроскопическому D , а резкое увеличение скорости эволюции — наличием ν , что и проясняет использование эпитета «затравочная» (ср. с ЭМГ-сопротивлением). Несмотря на наглядность этого образа, доказать сию гипотезу очень трудно, не в последнюю очередь из-за того, что, вообще говоря, она неверна (что не мешает на ее основе получать правильные ответы в отдельных частных случаях).

На самом деле вместо такой гипотезы существует строгая *теорема о границах* (Е. Б. Татарина и др.), утверждающая, что в течениях с конечными функциями Ψ (с $|\Psi|_{\text{max}} = M < \infty$) — т. е. с хорошо

определенным P — средний квадрат смещения частиц скаляра по плоскости укладывается в «вилку»

$$D \leq \frac{\langle R^2 \rangle}{4t} \leq D + \frac{M^2}{D} \quad (1.46)$$

(в действительности указанные авторы доказали ее в общем трехмерном и нестационарном случае, но здесь она будет использована только в упомянутых узких рамках). Вывод (1.46) технически достаточно сложен, но сам результат очень естествен и может быть подтвержден наглядными примерами. Скажем, левая граница возникает при «пятнистом» расположении турбулентности на плоскости, а относительно правой — см. ниже.

Как и во всех строгих результатах, очень важно понимать, чего на самом деле формула (1.46) не означает. В частности, из нее не следует обязательная диффузионность эволюции n . Конечно, в случае примитивного $\langle R^2 \rangle \propto t^\alpha$ показатель α согласно этой формуле не может отличаться от 1, но, во-первых, эволюция может быть устроена сложнее, вилка при $P \gg 1$ весьма широка и вполне допускает длительное существование других режимов (и тому есть конкретные примеры), и, во-вторых, соотношение $\alpha = 1$ необходимо, но не достаточно для диффузионного характера переноса n (см. следующую лекцию).

Однако, все оговорки будут сделаны потом, начинать стоит с позитива. Перейдем к убедительным примерам успешного применения сформулированной в виде гипотезы *диффузионной парадигмы*. Рассмотрим три характерных режима конвекции в течениях $P \gg 1$.

1. Полосовое течение, представленное на рис. 1.28. На самом деле для специфики ответа важна только периодичность $\Psi(y)$. При наличии веры в существование D_{eff} , его оценка следует из простейшего анализа наглядной картины движения частиц скаляра. В зависимости

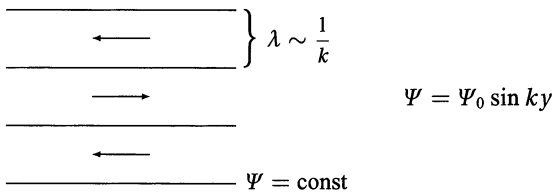


Рис. 1.28. Топология полосового течения

от своего положения в потоке они быстро сносятся в ту или другую сторону по x , кардинально меняя характер этого движения за счет диффузии по y на временах $t > 1/(Dk^2)$. Именно затравочная (молекулярная) диффузия является «коллективизатором» эволюции, разме-

шивая частицы по конвективным «состояниям», и «организатором» среднего D_{eff} . Рассматривая характерное смещение частиц в потоке данного знака как «эффективную» длину пробега (переходя диффузионным образом из потока в поток, они как бы многократно случайным образом шагают влево–вправо именно на l), можно написать

$$\Psi \sim \nu \lambda, \tau \sim \frac{\lambda^2}{D}, l = \nu \tau \rightarrow D_{\text{eff}} \sim \nu l = \frac{l^2}{\tau} \sim \frac{\Psi^2}{D} \sim DP^2$$

(естественно, здесь речь идет об эффективной диффузии вдоль оси x). Этот режим полностью эквивалентен токовой «змее» (см. рис. 1.17 и формулу (1.33)) и является наглядным примером максимального переноса: действительно, течения здесь направлены наиболее оптимальным (с учетом необходимости $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$) образом — движутся в требуемом направлении, никуда не сворачивая и сохраняя свою ширину, ср. (1.46).

2. Конвективные ячейки, симметричные по x и y и изображенные на рис. 1.29. Здесь все линии тока замкнуты, плоскость разбита на квадраты сепаратрисами $\Psi = 0$, частицы болтаются в своих ячейках и в отсутствие затравочной диффузии переноса вообще нет. Ее же

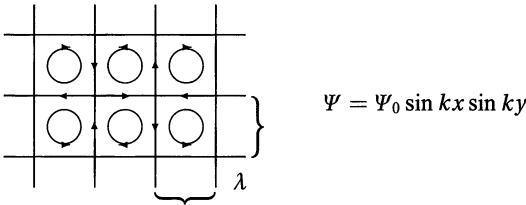


Рис. 1.29. Топология конвективных ячеек

наличие приводит к стохастизации движения в узком приграничном слое $\Delta \sim \sqrt{Dt_{\text{об}}}$ (за время оборота находящиеся в нем частицы имеют возможность перескочить в соседние ячейки, сменив характер движения и сместившись в пространстве). Эффективная длина пробега, очевидно, теперь равна просто λ , но проблема в том, что вклад в транспорт дают только присепаратрисные частицы — диффузионно-то уширяются на Δ все линии тока, но вдали от $\Psi = 0$ это не сказывается на топологии траекторий. Такая дифференциация поведения требует введения нового понятия *эффективной доли* участвующих в переносе частиц. При достаточно равномерном размещении скаляра по плоскости она по порядку величины равна относительной площади указанных поясков $\epsilon \sim \lambda \Delta / \lambda^2 = \Delta / \lambda$, и

$$\Psi \sim \nu \lambda, l \sim \lambda, \Delta \sim \sqrt{\frac{D\lambda}{\nu}} \rightarrow D_{\text{eff}} \sim \nu \lambda \cdot \epsilon \sim \sqrt{\Psi D} \sim DP^{1/2}.$$

Здесь макроскопическая диффузия идет гораздо медленнее, но зато одинаково по всем направлениям в плоскости $xу$. По-видимому, это наихудший вариант конвективного транспорта (для течений, занимающих всю плоскость $xу$): сетка сепаратрис максимально препятствует движению n . Его полезно «переписать» в терминах мезоскопически усредненного ЭМГ-сопротивления.

3. Шахматная доска, называемая так потому, что ее потоковая функция попеременно и периодически принимает на плоскости только два «бело-черных» значения ± 1 : $\Psi = \Psi_0 \text{sign}(\sin kx \sin ky)$. Течение «загнано» в бесконечно узкие протоки вдоль сторон квадратов на рис. 1.29, переносящие, однако, конечный поток. Этот вариант можно мыслить как предел постепенного выполаживания вершин и впадин горной страны случая 2, когда рельеф становится все более «столовым» со все более крутыми склонами. Нетрудно понять, начиная с каких ширин формируемых протоков $\delta \rightarrow 0$, ситуация получит качественное изменение (рис. 1.30). Дело в том, что большое Δ в этом процессе формирования тоже убывает (поскольку $t_{об} \sim \lambda/v \propto \delta$), но медленнее, и при переходе через границу $\delta \sim \Delta$, т. е. начиная с $\delta < \lambda/P$, частицы скаляра при своем движении вдоль границ ячейки заведомо успевают перескочить сепаратрису за один оборот, и диффузионное уширение траекторий выпадает из ответа:

$$D_{\text{eff}} \sim v\lambda \frac{\delta}{\lambda} \sim \Psi \sim DP$$

(теперь уже $\epsilon \sim \delta/\lambda$, так как транспортно эффективны лишь частицы, находящиеся в протоках).

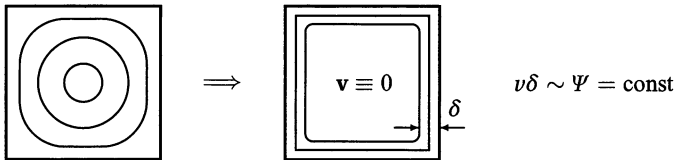


Рис. 1.30. Стягивание протоков при формировании шахматной доски

Все три модели замечательны тем, что допускают полное аналитическое исследование, т. е. их диффузионность доказывается, и теоретически определяются не только степени P при D_{eff} , но и численные коэффициенты. Первый вариант относится к физическому фольклору и особенно прост (см. задачи 1 и 2), расчеты второго были проведены независимо в работах М. В. Осипенко и др. и М. N. Rosenbluth et al. (скейлинг существенно ранее получил Н. К. Moffat), третий принадлежит А. М. Дыхне. Для декларируемых в данном курсе качественных

представлений интересно также разное поведение эффективного переноса в этих течениях при $D \rightarrow 0$: $D_{\text{eff}} \rightarrow \infty, 0, \text{const}$ соответственно (самое время вспомнить утверждение о $Q \propto D$). Два первых режима еще и широко встречаются на практике.

Что ж, достигнутые успехи заставляют снова задаться сакраментальным вопросом: «Чему научились?». Высказанные при разборе задач соображения позволяют выдвинуть еще одну, более конкретную гипотезу о том, что ответы в данной теме параметризуются соотношением $D_{\text{eff}} \sim DP^\alpha$ с $1/2 \leq \alpha \leq 2$ в зависимости от топологии линий уровня Ψ (n в ЭМГ), причем в «общем случае» $\alpha < 1$ (поскольку в нем макроскопический перенос без D невозможен). Назовем ее *диффузионно-скейлинговой парадигмой* и попробуем на этой основе исследовать именно «общий» вариант. Тут главное — понять, что он из себя представляет.

При формировании представления о новом режиме течения удобно опереться на уже пройденные этапы, и стоит задуматься, какой кочкой воспользоваться и куда с нее прыгать, или, по научному, какой случай из трех взять за базовый и как его модифицировать? Все говорит в пользу второго варианта (симметрия, отсутствие далеких течений типа Гольфстрима, равномерное заполнение плоскости конвекцией, схожесть предела $D \rightarrow 0$), но его явная вырожденность требует существенных изменений. Модификация будет исходить из принципа, что «общее положение» — это то, что не меняется при малом «шевелении» горного рельефа «страны Ψ ».

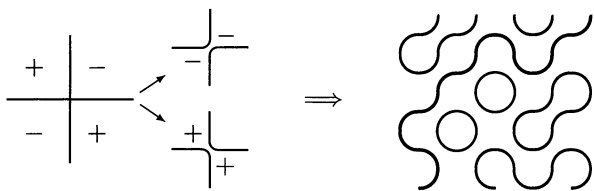


Рис. 1.31. Расщепление седел и формирование длинных линий

В этом контексте топологическая вырожденность конвективных ячеек заключается в сосредоточении всех седел на уровне $\Psi = 0$ (что и определяет регулярную сепаратрисную сетку). Добавление сколь угодно малого возмущения $\delta\Psi$ мгновенно приведет к тому, что все горные перевалы «съедут» с нулевого уровня (вероятность их обнаружения на нем станет равной 0), и квадратная сетка расщепится во всех своих пересечениях (рис. 1.31). Это расщепление будет достаточно случайным (оно зависит от того, сместилось ли седло в область положительных или отрицательных значений Ψ , как это и изображено

на рис. 1.31 слева), так что изолинии $\Psi = 0$ начнут сильно «вилять» и извиваться по плоскости, замыкаясь в отдельные «кружки» или образуя большие складчатые фигуры (рис. 1.31 справа). Вдоль некоторых фигур, хотя и сильно петляя, течение уходит достаточно далеко и даже сколь угодно далеко, правда число таких фигур, называемых также кластерами, убывает с ростом их размера. Можно показать из соображений симметрии, что в системе с любой $\Psi(x, y)$ «общего положения» существует ровно одна бесконечная нулевая линия тока (точнее, линия $\Psi = \langle \Psi \rangle$), специально выделенная на рисунке. Извилистость длинных изолиний столь сильна, что переводит их в разряд так называемых фрактальных кривых.

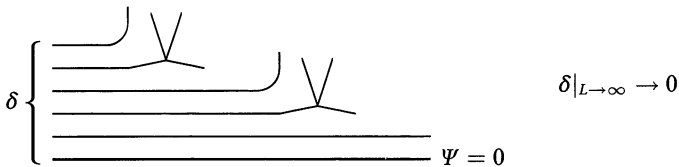


Рис. 1.32. «Эрозия» пучка близких траекторий

Но пассивный скаляр переносится потоком, отдельная линия тока дает в транспорт не более чем нулевой вклад. Требуется информация о поведении их «пучков», причем особенно интересны топологические свойства изолиний, близких к длинным нулевым. Здесь ситуация не слишком благоприятствует далекому сносу, наличие ненулевых седел препятствует сохранению пучка, постепенно отщепляя от него все новые и новые потоки. Схематически этот процесс изображен на рис. 1.32, где ведущая линия $\Psi = 0$ большого кластера «размотана», вытянута и изображена в виде прямой. Сначала все линии в пучке идут одной колонной, но возникновение на их пути седла разводит их в разные стороны: находящиеся по одну сторону сепаратрисы продолжают «двигаться» вместе с нулевым собратом, другие же сворачивают и выбывают из игры в дальнем переносе. С пройденным путем встречаются все более и более близкие к 0 седла, и ширина пучка асимптотически стремится к 0 тоже: абсолютно все изолинии $\Psi \neq 0$ замкнуты.

В качестве наглядного примера функций Ψ с указанными свойствами может служить уже упоминавшееся в седьмой лекции одно-масштабное течение

$$\Psi = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\mathbf{k}_i \mathbf{r} + \varphi_i).$$

Здесь $|\mathbf{k}_i| = k_0$, а $A_i, \varphi_i, \widehat{\mathbf{k}_i \mathbf{e}_x}$ произвольны (см. рис. 1.20). Число складываемых в сумме N должно быть не меньше 4 ($N = 1$ соответствует поперечному течению, $N = 2$ — конвективным ячейкам, а при $N = 3$ расщепленные нулевые линии недостаточно извилисты). Особое удобство варианту придает универсальность размера «складок» рельефа $\lambda \sim 1/k_0$. С другой стороны, в нем существует определенная корреляция в расщеплении соседних седел, отсутствующая в «общей» модели, но, кажется, она не влияет на свойства больших кластеров.

Мы недаром уделили столько внимания этим двум обстоятельствам, отличающим топологию «общего» течения от случая конвективных ячеек. Они важны, но важны только они. Оказывается, что для оценки D_{eff} в таком сложном варианте нужны лишь 2 числа (так называемых фрактальных показателя), характеризующих как раз извилистость линий уровня и уменьшение ширины потока:

$$L \sim l \left(\frac{l}{\lambda} \right)^\beta \quad \text{и} \quad \delta \sim \lambda \left(\frac{\lambda}{l} \right)^\gamma.$$

Здесь l — смещение «гуляющих» линий тока на плоскости («диаметр» образуемой фигуры), λ — характерный размер их отдельных складок, а L — их настоящая длина. Именно эти показатели следует спрашивать у «теории турбулентности», и замечательным образом они в ней (точнее, в теории перколяции) уже вычислены — считается, что $\beta = \gamma = 3/4$ (подробности см. в обзоре М. Б. Исиченко). «Теории переноса» остается соответствовать.

Что ж, предыдущий опыт должен сказаться. Движение частиц скаляра в новой ситуации по-прежнему складывается из гидродинамического сноса $L \sim v\tau$ и диффузионного смещения поперек потока $\Delta \sim \sqrt{D\tau}$, приводящего (при $\delta \sim \Delta$) к «соскакиванию» с благоприятного течения, так что «длина пробега» l определяется соотношением

$$\lambda \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{3/4} \sim \sqrt{\frac{Dl}{v} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^{3/4}} \rightarrow (l/\lambda)^{13/4} \sim v\lambda/D \sim P,$$

причем в переносе эффективно участвуют только частицы, находящиеся в узкой ленточке потока вдоль L : $\epsilon \sim L\delta/l^2$ (соседние потоки разнесены на l). Следовательно (М. Б. Исиченко и др.),

$$D_{\text{eff}} \sim \frac{l^2}{\tau} \epsilon \sim v\delta \sim DP^{10/13}$$

(почему здесь использовано выражение l^2/τ , а не vl ?).

Парадигма явно демонстрирует завидные успехи. Самое время перейти к негативу.

ЗАДАЧИ

1. Найти точное описание эффективной эволюции пассивного скаляра в среде с полосовым течением.

Решение. Исходное уравнение переноса есть

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \Psi_0 k \cos ky \frac{\partial n}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right).$$

Подставляя в него $n \approx \langle n \rangle(x, y, t) + \tilde{n}(x, y, t) \cos ky$ (здесь и ниже под $\langle \cdot \rangle$ понимается усреднение по «промежуточным» масштабам y , так что в остающихся «медленных» зависимостях $l_y \gg k^{-1}$) и разделяя масштабы, можно записать

$$\begin{aligned} \Psi_0 k \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} &= -k^2 D \tilde{n}, \\ \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + \Psi_0 k \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} \langle \cos^2 ky \rangle &= D \left(\frac{\partial^2 \langle n \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle n \rangle}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

В первом уравнении опущены первая по t , вторая по x и обе по «медленному» y производные от \tilde{n} , что требует асимптотических условий $t \gg k^2 D$ (поперечная диффузия успела связать различные потоки) и $kl_x \gg 1$ (облако скаляра успело расплыться по сравнению с λ), а также уже выпяченного $kl_y \gg 1$. Пренебрежение кратными гармониками $2k, 3k, \dots$ связано с наличием у них амплитудной малости (по сравнению с первой гармоникой), см. ниже. Найдя генерируемые знакопеременным течением флуктуации \tilde{n} из первого уравнения и подставив их во второе, можно получить искомое

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{\left(\frac{\Psi_0^2}{2D} + D \right)}_{D_{\text{eff}}} \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} \right] + D \frac{\partial^2 \langle n \rangle}{\partial y^2}.$$

В случае «коллективизации профиля» диффузией флуктуации плотности скаляра малы

$$\tilde{n} = -\frac{\Psi_0}{kD} \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} \sim \frac{\Psi_0}{Dk\sqrt{D_{\text{eff}}t}} \langle n \rangle \ll \langle n \rangle,$$

но из-за большой скорости течения ($P \gg 1$) именно они определяют эффективный перенос вдоль x .

2. Обобщить полученное решение на случай произвольной периодической функции $\Psi(y)$.

Решение. Все выкладки остаются в силе, только теперь разделение уравнения на флуктуирующую и плавную части для $n \approx \langle n \rangle + \delta n$ дает

$$\frac{d\Psi}{dy} \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \delta n}{\partial y^2}, \quad D_{\text{eff}} \frac{\partial^2 \langle n \rangle}{\partial x^2} = -\left\langle \frac{d\Psi}{dy} \frac{\partial \delta n}{\partial x} \right\rangle,$$

так что под усреднение в эффективном коэффициенте диффузии попадает

$$-\frac{d\Psi}{dy} \int^y (\Psi - \langle \Psi \rangle) dy = -\frac{d}{dy} \left[(\Psi - \langle \Psi \rangle) \int^y (\Psi - \langle \Psi \rangle) dy \right] + (\Psi - \langle \Psi \rangle)^2,$$

и поскольку среднее значение производной от периодической функции равно 0, то отсюда следует, что

$$D_{\text{eff}} = \frac{\langle (\Psi - \langle \Psi \rangle)^2 \rangle}{D} = \frac{\langle \Psi^2 \rangle - \langle \Psi \rangle^2}{D}$$

(ср. с задачей 2 из лекции 6).

3. Чему равен фрактальный показатель β у траектории диффундирующей (броуновской) частицы с длиной пробега λ ?

Решение. Поскольку за N последовательных скачков такая частица проходит путь $N\lambda$, а в пространстве смещается на $l \sim \sqrt{N}\lambda$, то для нее $\beta = 1$ (при движении и на плоскости, и в пространстве). Расщепленная нулевая линия в одномасштабном течении менее извилиста и потому обладает меньшим показателем. Если для удобства сопоставления посчитать, что броуновские блуждания происходят по квадратной решетке с расстоянием между узлами λ , то диффундирующая частица на перекрестке (в узле) имеет всегда равные, ни от чего не зависящие вероятности продолжить движение, вернуться или повернуть влево-вправо и, стало быть, ее траектория допускает самопересечения и кратные прохождения одних и тех же участков. Нулевая «бесседельная» линия Ψ обязательно поворачивает, причем в случае повторного выхода на перекресток только в одном направлении, для нее возможно лишь замыкание, но не пересечение. Показатель $\beta = 3/4$ характерен для достаточно длинных реализаций такого рецепта ее формирования, когда «короткозамкнутые» варианты выбрасываются.

4. Язык фрактальных показателей весьма информативен для описания особенностей конвективного движения. Например, в различных приложениях часто приходится иметь дело с ситуацией, когда на «хаотический» (турбулентный) поток наложено некоторое регулярное крупномасштабное течение, скажем, вдоль оси y , так что можно считать, что $\Psi = \Psi_0[x/L + f(x, y)]$, где $f \sim 1$ — флуктуирующая на масштабах λ функция с $\langle \nabla f \rangle = 0$, причем $\lambda \ll L$. Если топология линий уровня f описывается фрактальными показателями β, γ , то вариант с конечным L приводит к перестройке их поведения — в суммарном течении появляются «протоки» из инфинитных линий $\Psi = \text{const}$ малой, но конечной ширины $\delta \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} \text{const} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$, направленные в среднем вдоль y , но «гуляющие» по x . Оценить характерную амплитуду этих смещений (как бы извивы гористой береговой линии на материковом склоне) (М. Б. Исиченко, Я. Л. Калда).

Решение. Ненулевой суммарный перенос с величиной $\Psi_0 X/L$ ($X \gg l$ — ширина изучаемой области по x) в такой среде происходит вследствие

регулярной составляющей Ψ , но осуществляется он в узких протоках с большой скоростью течения $\sim \Psi_0/\lambda$, отстоящих друг от друга на размер их смещения по склону l . По этой причине каждый такой канал должен заключать в себе поток в $\sim \Psi_0 l/L$. На малых по сравнению с l масштабах влияние среднего градиента не чувствуется, и характер линий уровня $\Psi = \text{const}$ аналогичен поведению линий $f = \text{const}$. Это позволяет сделать следующую оценку:

$$\frac{\Psi_0}{\lambda} \delta \sim \Psi_0 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^\gamma \sim \Psi_0 \frac{l}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{l}{L} \sim \left(\frac{\lambda}{L}\right)^{\gamma/(\gamma+1)}.$$

Видно, что размер извивов значительно отстоит от своей очевидной верхней границы (достигаемой при $f = f(y)$) L . Характерная же длина этих протоков («длина береговой линии на материковом склоне») растет линейно по проходимому ими вдоль $Y \gg l$:

$$L_Y \sim Y \left(\frac{l}{\lambda}\right)^\beta \sim Y \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{\beta/(\gamma+1)}.$$

ЛЕКЦИЯ 10

Эффект скоррелированного сноса. Специфика нестационарной конвекции. Роль пространственной размерности в стохастике. Примеры недиффузионных режимов, номенклатура процессов.

Простота качественных подходов, овладение которыми является целью данного курса, всегда действует вдохновляюще, однако как правило она связана с тем, что мы чего-то не замечаем. Подвергнем, например, более пристальному анализу такое важное понятие как «эффективная доля». Насколько правильным было оперирование с ним в предыдущей лекции? Опорой послужат точные решения (полная численная проверка «общего» варианта сноса требует разрешения масштабов $\delta \ll \lambda \ll l \ll L!$). Смоделируем большие промежутки между определяющими транспорт узкими течениями в «одномасштабном» случае «раздвижением» протоков в полосовом периодическом течении: сохраняя их ширину a и величину скорости, разнесем соседей на расстояние $b \gg a$, считая, что в промежутках течение отсутствует (в проверяемом варианте оно не давало вклада в перенос) (рис. 1.33).

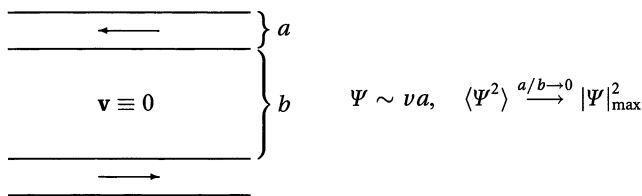


Рис. 1.33. «Раздвинутые» протоки

Механическое повторение процедуры из конца предыдущей лекции (единственно, ширина «пучков» здесь не убывает) дает

$$\tau \sim \frac{a^2}{D}, \quad l \sim v\tau, \quad \epsilon \sim \frac{ab}{b^2} \quad \rightarrow \quad D_{\text{eff}} \sim \frac{l^2}{\tau} \epsilon \sim \frac{(va)^2}{D} \frac{a}{b},$$

что выглядит исключительно правдоподобно (ну действительно, должно же раздвижение уменьшать перенос по сравнению с вариантом 1), но оказывается абсолютно неверным. Строгий расчет во второй задаче из предыдущей лекции дает $D_{\text{eff}} = \langle \Psi^2 \rangle / D$, т. е. полное отсутствие множителя a/b , поскольку поток набирается в протоках $\Psi = \int v dy$ и, достигая максимального (минимального) значения $\pm M$, остается неизменным в промежутках. Более того, увеличение b приводит к хотя и незначительному, но росту D_{eff} , поскольку (рис. 1.33) средний

квадрат Ψ все более приближается к M^2 (ср. (1.46)). Очевидно, требуется серьезная операция по приведению нашего «здравого смысла» в соответствие с реальностью.

На самом деле в диффузионном процессе время «забывания» предыстории движения (часто говорят о «сбое фазы») τ характеризует период, по прошествии которого смещения (пробеги) частицы теряют связь между собой. Вся суть диффузии — в складывании квадратов этих смещений: если на каждом шагу $\Delta x_i = \pm 1$, то за N шагов сдвиг в среднем (по разным частицам) составляет

$$x = \sum_{i=1}^N \Delta x_i \quad \rightarrow \quad \langle x^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \underbrace{\langle (\Delta x_i)^2 \rangle}_{=1} + \sum_{i \neq j} \underbrace{\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle}_{=0} = N$$

(ср. задачу 3 в прошлой лекции), откуда и возникает пресловутый корневой скейлинг.

Забыли ли частицы, вышедшие из пучка a , свое движение в нем? Отнюдь. В данном случае истинное $\tau \sim b^2/D$, и в течение него они могут многократно возвращаться в первоначальный поток, скоррелировано смещаясь в прежнем направлении. Да, они на время изымаются из игры, но после отдыха вступают в нее на прежней стороне. Для правильного учета эффекта необходимо принять во внимание, что диффузионная траектория равномерно заполняет плоскость (это, в сущности, парафраз показателя $\beta = 1$ из задачи 3 к лекции 9), поэтому они успевают пробежать (во много приемов) в этом потоке аж $l \sim v\tau \cdot a/b$, и («участвует» вся площадь)

$$D_{\text{eff}} \sim \frac{l^2}{\tau} \underset{\text{либо}}{\sim} v l \epsilon \sim \frac{(va)^2}{D}$$

(а почему здесь использование представления vl — с учетом ϵ — допустимо?), что парадоксальным, но правильным образом не зависит от b (время выхода на эффективный режим, однако, от b зависит, усредненное описание «работает» на масштабах $\gg l$).

Кроме всегда полезного большего углубления в существо дела, предпринятый разбор дает ценный совет о том, что определение фрактальных показателей рельефа течения с необходимостью должно учитывать этот эффект *скоррелированного сноса* — не все существующие извивы и сужения существенны. Если при столкновении с очередным седлом часть пучка отщепилась внутрь отдельной петли той же самой фигуры, вдоль которой идет транспорт n , то это не должно учитываться в уменьшении δ , поскольку частицы, «провалившиеся» вглубь исходного кластера, неизбежно попадут на него снова даже после сколь угодно большого времени пребывания в таком «кокопе»

и пойдут в ту же атаку. По-видимому, в оценке М. Б. Исиченко и др. были выбраны нужные β и γ , но известны попытки использовать и другие, заведомо неправильные показатели.

Нестационарность поля скоростей

Научившись внимательности, начнем обобщать задачу о конвекции. В силу возрастающей технической сложности и убыли точных результатов изложение будет короче, и чем дальше, тем конспективнее. Что меняется в вихревой двумерии при возникновении зависимости $\mathbf{v}(t)$? Простейшим вариантом является опять-таки полосовое течение с $\Psi = \Psi_0 \sin ky \sin \omega t$. Качественная оценка переноса аналогична проделанной ранее (см. рис. 1.28), только в случае, когда частота изменения поля велика по сравнению с обратным временем пребывания частиц в потоке одного знака $\omega \gg D/\lambda^2$, последние до диффузионного выхода из него смещаются не более, чем на $l \sim v/\omega$, поэтому в новой ситуации

$$D_{\text{eff}} \sim \frac{l^2}{\tau} \sim D \left(\frac{v}{\lambda \omega} \right)^2$$

(опять-таки, почему не $v l$?): время сбоя фазы τ остается прежним. Видно, что в задаче возник новый параметр, а число Пекле уже как-то не проявляется. Строгое решение подтверждает этот скейлинг и позволяет исследовать весь спектр поведения системы при произвольном ω (см. задачу 1).

Эта простая модель указывает на роль новых характеристик процесса, но, несомненно, не может служить «базовым» представителем нестационарного режима, ибо вырождена в смысле топологии течения, примитивной и, что особенно важно, неизменной во времени. В общем случае при размещивании возможна и играет ключевую роль смена характера движения частиц скаляра только за счет $\mathbf{v}(t)$ — из-за качественной перестройки течения. Линии тока в каждый момент $t = \text{const}$ по-прежнему лежат на горном рельефе Ψ , но рельеф этот уже не жесток, а «течет» сам, эволюционируя во времени, так что траектория частицы, «сканирующей» его разные участки в разные моменты t , может весьма сильно отличаться от этих линий. В результате частицы n получают свободу «гулять» по плоскости, несмотря на замкнутость токовых линий $\Psi = \text{const}$ (рис. 1.34). Размерность их движения как бы «эффективно» повышена на 1, «расширенное» за счет добавления оси t трехмерное пространство траектории уже не делят (см. ниже), запрет на их самопересечение в плоскости исчез, и хаос в движении не запрещен. Идеологическая нужда в D пропала, все возвращается к (1.43) — естественно, при определенном соот-

ношении между реальными ω , λ (характерным пространственным масштабом линий тока) и D , когда чисто динамическая игра в кости доминирует над затравочно-диффузионной.

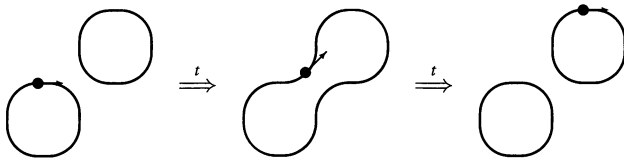


Рис. 1.34. Смена траекторий в нестационарном течении

На сцену выходит новый физический параметр (как раз в стиле ad hoc), характеризующий стохастический вклад в задачу от нестационарности поля скоростей и сменяющий неадекватное теперь жизни число Пекле. Это $T = v/(\omega\lambda)$. Если он мал, то частицы не успевают сколько-нибудь основательно отсканировать рельеф Ψ , он существенно меняется прежде, чем они пройдут хотя бы один «извив». Эффективная диффузия в этом случае вполне универсальна

$$\tau \sim \frac{1}{\omega}, \quad l \sim \frac{v}{\omega} \quad \rightarrow \quad D_{\text{eff}} \sim \frac{l^2}{\tau} \sim vl \sim \Psi T$$

и называется *квазилинейным пределом*, поскольку соответствует вычисляемой в квазилинейной теории в плазме (там, правда, в пространстве скоростей). В противоположном случае $T \gg 1$ частицы в своем движении начинают чувствовать топологию длинных линий уровня Ψ , перенос опять сосредотачивается в малой доле площади, и исходя из диффузионно-скейлинговой парадигмы можно высказать гипотезу о

$$D_{\text{eff}} \sim \Psi T^{-\alpha}$$

с показателем, зависящим от характера линий тока. В «общем» случае, очевидно, $\alpha > 0$ (без нестационарности нет переноса). В качестве наглядной модели здесь опять годится «одномасштабное» течение типа $\sum_i A_i \sin(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega_i t)$, для которого оценки проводятся до конца и дают $\alpha = 3/10$ (см. задачу 2).

Трехмерные течения

Повышение пространственной размерности задачи также снимает потребность в затравочной диффузии для хаотического размешивания частиц. Здесь в общем случае траектории стохастичны уже в стационаре (т. е. вместе с линиями тока): в 3-d варианте векторное поле может быть устроено достаточно сложно, интегрирующий множитель

для его силовых линий, вообще говоря, отсутствует. Иными словами, интегралы их уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \rightarrow \begin{cases} \mu_1(\mathbf{r}) = \text{const} \\ \mu_2(\mathbf{r}) = \text{const} \end{cases}$$

как правило существуют лишь в малом, но не глобально, и

$$\exists \mathbf{v}(x, y, z) \in \{v_x, v_y, v_z\} \quad \forall \lambda(x, y, z), \mu_i(x, y, z), i = 1, 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{v} \neq \lambda[\nabla\mu_1, \nabla\mu_2].$$

Такие случаи являются правилом, а не исключениями, т. е. векторное поле «обычно» не ложится ни на какую систему поверхностей (ср. с 2-d вариантом, где $\mu_2 = z$) — в этом свойстве многомерных (в том числе фазовых) пространств, собственно, и кроется причина так называемой неинтегрируемости классических задач о движении несимметричного волчка или $n \geq 3$ тел. Картина примерно такова. В малой окрестности неособой точки поля \mathbf{v} решение системы существует, и интегралы μ_i могут быть выбраны весьма произвольно, например, исходя из того, чтобы поверхности их уровней представляли собой две пересекающиеся «стопочки» почти плоских листов. Однако более внимательный анализ вскрывает, что две лежащие на разных листах в стопке линии тока на самом деле являются одной и той же линией, которая, «побродив» в стороне, вернулась в эту окрестность. Исправление оплошности заметно искривляет листы, но процесс неостановим — есть и вторые, третьи и т. д. возвращения. Поверхности становятся все более сложными, и быстро выясняется, что в пределе бесконечной длины токовой линии никаких гладких листов, вмещающих ее, не существует. Кривая делит плоскость, но не пространство, в котором, следовательно, ее поведение практически ничем не ограничено, и течения пользуются свободой выбора хаотического *modus vivendi*.

В теории возникает нужда в каком-то описании этого хаоса. Стандартно используют так называемые сечения Пуанкаре — рассматривают «протыкание» траекторией (линией тока) фиксированной поверхности (например, плоскости) как скачкообразное движение по ней некой частицы. В регулярном варианте пунктирная «траектория» либо рассыпается на конечное число точек (если, например, линия тока замкнута или уходит на бесконечность), либо ложится на какую-либо кривую (линию пересечения данной поверхности с поверхностью тогда единственного μ , см. ниже), а в стохастическом всюду плотно заполняет целые участки поверхности. Можно считать, что последовательные протыкания представляют собой случайные пробеги как

бы диффундирующего объекта. Этот язык весьма удобен в численном моделировании. Важным вопросом является характер хаоса, который совсем не обязан быть именно диффузионным, см. конец лекции. Для привычного варианта надо уметь аналитически или численно определять коэффициент такой диффузии. В реальных задачах все будет зависеть от иерархии уже трех игроков в кости — трехмерии, нестационарности и молекулярной диффузии.

Интегрируемый случай фактически сводится к разобранной выше двумерии. Для него достаточно наличия даже одной системы вложенных поверхностей $\mu(\mathbf{r}) = \text{const}$. При одновременном присутствии μ_1, μ_2 линии тока лежат на пересечении двух семейств и либо замкнуты, либо входят/выходят из особых точек и/или бесконечности. Один интеграл, например, μ_1 дает «намотку» на поверхности, стандартно представляющие собой торы, которые хорошо делят пространство. Переход между ними (глобальный транспорт скаляра) возможен либо из-за $D \neq 0$, либо $\omega \neq 0$. Для бездивергентного клебшева течения $\lambda = 1$ (но, подчеркнем еще раз, «общее» трехмерное вихревое течение хаотично).

Что ж, классификация проведена, расхожие рецепты поведения высказаны, одни (попроще) подробно, другие в принципе. Вычисление конкретных D_{eff} может быть технически непростым, но куда двигаться представляется понятным. Где же обещанная неизбежность смены приоритетов?

Крах диффузионной парадигмы

На самом деле представление об обязательности именно диффузионного поведения в стохастике абсолютно иллюзорно и глубоко ошибочно. Оно является всего лишь частным случаем гораздо более разнообразно устроенных процессов. Приведем по традиции опять три альтернативных примера именно из области конвективного транспорта, причем в стационарных полях \mathbf{v} .

1. Случайное полосовое течение. Замечательная теорема о границах загоняет эволюцию в диффузионную вилку только в случае конечности потоковой функции. Однако физика совсем не требует этого от Ψ — в отличие от \mathbf{v} . Пусть плоскость по-прежнему разбита на параллельные оси x потоки с одинаковой шириной λ и амплитудой скорости ν (см. рис. 1.28), но направление (знак) этой скорости уже не чередуется регулярно, а определяется бросанием монетки (герб — вправо, решка — влево). Такое случайное течение гораздо более отвечает понятию «турбулентность» и допускает наличие весьма больших «кластеров» (с малой убывающей вероятностью) протоков одного знака (серия гербов может быть сколь угодно длинной). Поскольку

$\Psi = \int v dy$, то $\Psi \propto \sqrt{y}$ (накопленный выигрыш/проигрыш в орлянку диффузионен) и $|\Psi|$ не ограничен. Очевидно (см. (1.46)), эффективный транспорт в рамках (1.44) должен быть побыстрее диффузии. Действительно, его скейлинг можно оценить так. Как и в периодическом полосовом течении частицы скаляра диффундируют по y , меняя протоки и пребывая в течение t в $N \sim \sqrt{Dt}/\lambda$ штуках. Однако раскомпенсация знаков (разность чисел пройденных потоков вправо и влево) теперь достигает $\Delta N \sim \sqrt{N}$, а не $0 \vee 1$, поэтому средний квадрат конвективного смещения в таком течении (Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне)

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} \sim vt \frac{\Delta N}{N} \propto t^{3/4},$$

а вовсе не $t^{1/2}$. Такие процессы относят к разряду *супердиффузионных* (см. ниже).

2. Конвективные ячейки в начальной стадии. Природа использует и другие возможности для ухода от диффузионного примитива в рамках (1.44). В выводе D_{eff} для варианта, представленного на рис. 1.29, есть одно малозаметное, но исключительно важное предположение: «при достаточно равномерном размещивании скаляра по плоскости», позволяющей свести эффективную долю ϵ , являющуюся отношением чисел частиц, находящихся в разных «состояниях» к отношению занимаемых ими площадей. На самом деле усредненная эволюция в системе описывается уравнением

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} \sim \nu \lambda \Delta \langle v \rangle,$$

где $\langle n \rangle$, $\langle v \rangle$ — удельные (частные от деления их полного числа в ячейке на ее площадь) концентрации всех и только «активных» из присепаратрисной сетки толщины Δ частиц. Асимптотически затравочная диффузия действительно разравнивает профиль скаляра внутри каждого квадрата, устанавливая $n \approx \text{const}$ в его пределах и обеспечивая постоянство $\langle v \rangle / \langle n \rangle \sim \Delta / \lambda \sim \epsilon_\infty$. Однако, при $t \not\rightarrow \infty$ ситуация несколько иная. Активные сеточные частицы вовсе не обязаны дожидаться заполнения «внутренностей» квадратов, а могут сразу «прыгать» в соседние клетки. В результате на начальных стадиях (на временах $\lambda/\nu < t < \lambda^2/D$) облако скаляра «прорастает» в среду при своем расширении именно в виде сетки, и профиль n остается резко неоднородным. В первые моменты, когда за пределами поясков ничего нет, очевидно, $\langle v \rangle / \langle n \rangle \sim 1 \sim \epsilon_0$. В процессе заполнения пустот или расплывания сеточного контура локальная (настоящая) концентрация активных частиц играет роль граничного условия для диффундирую-

щей внутрь данного квадрата n . В выписанном диапазоне времен $\Delta \ll \sqrt{Dt} \ll \lambda$, и картина соответствует рис. 1.8 с n вместо B , в котором ось x направлена перпендикулярно какой-то стороне квадрата вглубь ячейки, а отсчет идет от границы пояса Δ , так что имеет место связь $\langle n \rangle \sim \langle v \rangle \sqrt{Dt} / \Delta$ (строго говоря, степенному скейлингу удовлетворяют не сами плотности, а их лаплас-образы $\langle n \rangle_p \propto \langle v \rangle_p / \sqrt{p}$, ибо $v(t) \neq \text{const}$, см. задачу 3, но это не меняет качественной картины), т. е. доля активных в переносе частиц довольно долго убывает от ϵ_0 до ϵ_∞ автомодельным образом, и эффективный перенос скаляра идет по закону $\langle R^2 \rangle \propto t^{1/2}$ (S. Havlin, D. Ben-Avraham), т. е. в виде *субдиффузионного* процесса.

Здесь уместны некоторые комментарии. Во-первых, этот скейлинг в указанных пределах целиком лежит в вилке из (1.44). Во-вторых, кажущееся противоречие с теоремой об увеличении потока, запрещающей скаляру расплываться медленнее, чем $\langle R^2 \rangle \sim Dt$ (стационарный поток на перепаде достаточно просто связан с нестационарным транспортом), разрешается тем обстоятельством, что при $t < \lambda^2/D$ указанный субдиффузионный процесс более быстр, чем сменяющий его по прошествии этого времени диффузионный $\langle R^2 \rangle \sim \sqrt{\nu \lambda D} t$, который, в свою очередь, намного сильнее затравочного.

3. Сжимаемые течения. Теорема об увеличении потока, как специально подчеркивалось, существенно нуждается в несжимаемости течения. При $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$ в среде легко возникают ситуации, в которых «конвекция» препятствует, а не помогает затравочной диффузии. Рассмотрим ставший в новых обстоятельствах содержательным одномерный вариант с $\mathbf{v} = -\nabla \varphi$ (ср. (1.43)):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(n \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D \frac{\partial n}{\partial x} \right).$$

В равновесии, в отсутствие потоков n , т. е. при $n d\varphi/dx + D dn/dx = 0$, в системе устанавливается бoльцмановское равновесие и частицы собираются в ямы потенциала (рис. 1.35). При небольших отклонениях

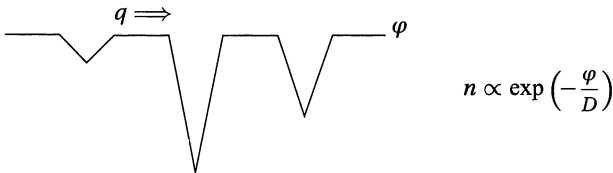


Рис. 1.35. Одномерное сжимаемое течение

от этого состояния вклад в ненулевой поток q дают лишь «эффективные» надбарьерные частицы, в транспорте ямы играют роль своеобраз-

разных «ловушек», задерживающих в себе элементы n и выключающих их из переноса. При ограниченности глубин этих форм рельефа φ в системе идет экспоненциально слабая диффузия, а при неограниченности — опять-таки субдиффузия.

В исследованных примерах использовалась стандартная номенклатура стохастического переноса, которую стоит обсудить поподробнее. Она основана на законе расплывания (расширения) облаков пассивного скаляра

$$\langle R^2 \rangle \propto t^\alpha,$$

и, как уже понятно, добавляет к стандартному термину «диффузия» приставку «супер-» в случае $\alpha > 1$ и «суб-» в противоположном варианте. Надо понимать, что эта номенклатура не идеальна, ибо, во-первых, неточна: $\alpha \neq 1$ не гарантирует недиффузионности процесса (зависимость $D = D(\mathbf{r}, t)$ может обеспечить любой скейлинг), во-вторых, груба: совпадение α не означает, что одинаковы и асимптотические (типа гауссовых в диффузии) профили n (есть и другие параметры) и, в-третьих, способна внушить иллюзии: условие $\alpha_1 < \alpha_2$ не обязательно говорит о большей медленности первого процесса (так как ускоряющийся не значит быстрый, а замедляющийся не значит медленный) — см. как раз случай конвективных ячеек. Лучшей, однако, не придумали.

Приведенные случаи неортодоксального поведения транспорта в силу своей пространственно-временной однородности никак не могут соответствовать диффузии с непостоянным коэффициентом, их наличие делает неизбежным вывод о необходимости задействовать в попытках описания стохастических переносов другие уравнения. Диффузия вовсе не уникальна в природе и матфизике.

Эти уравнения, адекватные подобным случаям, интегральны и являются уравнениями в *дробных производных*. Все сводится к пространственной и временной нелокальности плотности потока в (здесь для простоты одномерном) эффективном транспортном уравнении

$$\mathbf{q} \propto -\nabla \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(t', x')}{(t-t')^{1-\gamma} |x-x'|^{2\beta-1}} dx' dt' \quad (1.47)$$

(интересны различия между x и t), по-прежнему происходящему вследствие «наперсточной», хотя и более хитрой, перестановки элементов облака скаляра. На языке фурье- и лаплас-образов это выглядит гораздо симпатичней и терминологически понятней:

$$\mathbf{q}_{pk} \propto -ik(p^{1-\gamma} k^{2\beta-2} n_{pk}).$$

Наличие зависимости от значений n во всех других точках и в предшествующие моменты времени свидетельствует об отсутствии в системе четко определенных длины свободного пробега и времени забывания. В турбулентном конвективном переносе как правило существенна временная интегральность (например, при субдиффузии в конвективных ячейках система «помнит» весь процесс «заливки» центральных пустот), а в хаотическом недиффузионном размешивании в сечениях Пуанкаре — пространственная (из-за наличия неожиданных длинных скачков).

Такой инструментарий существенно расширяет возможности теории в рамках более общей *стохастической парадигмы*. Строгий усреднительный подход вполне позволяет получить эффективное описание всех трех альтернативных примеров. Так что и эти, весьма серьезные идеологические проблемы относятся к разряду преодолимых, правда, ценой существенной модификации парадигмы и овладения новой техникой.

ЗАДАЧИ

1. Найти точное описание эффективной эволюции по x пассивного скаляра в среде с полосовым периодическим во времени течением (Я. Б. Зельдович).

Решение. Аналогично задаче из предыдущей лекции следует подставить в исходное уравнение переноса

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \Psi_0 k \cos ky \sin \omega t \frac{\partial n}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right)$$

уже $n \approx \langle n \rangle(x, t) + [\tilde{n}_1(x, t) \sin \omega t + \tilde{n}_2(x, t) \cos \omega t] \cos ky$ (теперь под $\langle * \rangle$ подразумевается усреднение и по y , и по «быстрому» t , т. е. по процессам, медленным в сравнении с ω^{-1}). При выполнении соответствующих асимптотических условий (каких?) это уравнение «распадается» на

$$\omega \tilde{n}_1 = -k^2 D \tilde{n}_2, \quad -\omega \tilde{n}_2 + \Psi_0 \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} = -k^2 D \tilde{n}_1,$$

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + \Psi_0 k \frac{\partial \tilde{n}_1}{\partial x} \langle \sin^2 ky \cos^2 \omega t \rangle = D \frac{\partial^2 \langle n \rangle}{\partial x^2},$$

откуда

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \left(\frac{\Psi_0^2 k^4}{4(\omega^2 + D^2 k^4)} + 1 \right) \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x} \right].$$

Если устремить $\omega \rightarrow 0$, то «конвективная» добавка к D_{eff} получается в два раза меньшей, чем по формуле для исходно стационарного варианта. Почему?

2. Вычислить показатель α в скейлинге для D_{eff} в нестационарном «одномаштабном» течении с $T \gg 1$ (А. В. Грузинов, М. Б. Исиченко, Я. Л. Калда).

Решение. Прежде всего надо оценить время τ , в течение которого дающие основной вклад в перенос частицы движутся вдоль длинных линий тока. Оно мало по сравнению с ω^{-1} , поскольку движение осуществляется в узких (шириной δ) поясах вблизи «перколирующих» линий $\Psi = 0$, так что «соскок» с них происходит гораздо раньше, чем картина течения перестраивается в целом. Нетрудно видеть, что $\omega\tau \sim \delta/\lambda$. Следовательно,

$$\omega\tau \sim \frac{\delta}{\lambda} \sim \left(\frac{\lambda}{l}\right)^\gamma, \quad \nu\tau = L \sim l\left(\frac{l}{\lambda}\right)^\beta \quad \rightarrow \quad \omega\tau \sim T^{-\gamma/(\beta+\gamma+1)} = T^{-3/10},$$

откуда

$$D_{\text{eff}} \sim \frac{l^2}{\tau} \epsilon \sim \nu\delta \sim \nu\lambda T^{-3/10}.$$

3. Дробные производные встречаются в самых банальных ситуациях, например, «инкогнито» они появлялись еще в лекции 4. Каким образом связаны между собой полное число частиц в среде с граничным значением своей плотности при диффузионном проникновении в первоначально пустое полупространство?

Решение. Процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad x > 0 \quad \text{при} \quad n(0, t) = \nu(t), \quad n(x, 0) = n_0(x) = 0.$$

Совершая преобразование Лапласа по времени и учитывая начальное и граничное условия, можно написать

$$p n_p = D \frac{d^2 n_p}{dx^2} \quad \rightarrow \quad n_p = \nu_p \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} x\right).$$

Следовательно, полное число частиц

$$N_p \equiv \int_0^\infty n_p dx = \sqrt{\frac{D}{p}} \nu_p \quad \rightarrow \quad \nu \propto \frac{d^{1/2} N}{dt^{1/2}}$$

(при примитиве $\nu = \text{const}$ это соответствует $N \propto t^{1/2}$, см. лекцию). Обращение преобразования дает

$$N(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{D} \nu(t')}{\sqrt{\pi(t-t')}} dt', \quad \nu(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{N(t')}{\sqrt{D\pi(t-t')}} dt'.$$

Важным для приложений свойством дробных производных является их нелокальность, препятствующая простой трансформации при сдвиге начала отсчета $t \rightarrow t + \epsilon$. Связь $\nu \propto d^{1/2} N/dt^{1/2}$ имеет место только при $n_0 \equiv 0$. Если по прошествии некоторого времени t_0 попытаться рассмотреть возникшую ситуацию в качестве начального условия для последую-

щей эволюции, то эта пропорциональность будет потеряна и восстановится только асимптотически при $t \rightarrow \infty$, когда остающийся вклад n_0 в N станет пренебрежимо малым.

Видно, что такая система может быть использована в качестве аналогового «полуинтегратора» путем подачи на границу сигнала $v(t)$ и снятия $N(t)$. Для аналогового же полудифференцирования следует обратить зависимость, что особенно просто сделать, если плотность диффундирующей субстанции есть производная от какой-либо физической величины. Тогда задание v сведется к фиксации $\partial n / \partial x|_0$, а N , собственно, к $n|_0$: действительно, в старых обозначениях

$$\left. \frac{dn_p}{dx} \right|_{x=0} = -\sqrt{\frac{p}{D}} v_p.$$

Например, можно в режиме обычного скин-эффекта измерять электрическое поле $E(t)$ на границе проводника, через который пропускается ток $I(t)$.

4. Выписать уравнение для эволюции магнитного поля в тонкой проводящей пленке в общем двумерном случае в отсутствие эффекта Холла.

Решение. Очевидно, своеобразное скинирование в такой модели описывается уравнением (2 — символ двумерии)

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} \mathbf{e}_z = -\frac{c}{\Sigma} \text{rot}_2 \mathbf{J}, \quad B_z(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z = \frac{1}{c} \text{rot}_2 \left(\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2 \mathbf{r}' \right).$$

Обращая интегральный оператор с помощью двумерного пространственного преобразования Фурье, можно получить окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi^2 \Sigma} \Delta_2 \left(\int \frac{B_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2 \mathbf{r}' \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial B_{zk}}{\partial t} \propto -k B_{zk} \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} \propto -(-\Delta_2)^{1/2} B_z \end{aligned}$$

(почему в конце использованы именно эти знаки?). Любопытно, что то же самое соотношение возникает и для плотности поверхностного заряда в пленке при его так называемой максвелловской релаксации. Подходы к решению таких уравнений с произвольными степенями лапласиана будут обсуждаться в следующей части, данный же конкретный случай допускает очень простую и наглядную интерпретацию.

5. Воспользовавшись связью тангенциальной составляющей магнитного поля с поверхностной плотностью тока $\mathbf{B}_2|_{z=+0} = 2\pi/c \cdot [\mathbf{J}, \mathbf{e}_z]$ (пленка расположена в плоскости $z = 0$) и уравнением Максвелла в пустоте для полного \mathbf{B} , записать выведенное уравнение в терминах B_z в трехмерном пространстве.

Решение. В новых терминах на пленке

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{2\pi}{\Sigma} \text{div}_2 \mathbf{B}_2 = 0.$$

Поскольку в вакууме (да и вообще всегда)

$$\operatorname{div}_2 \mathbf{B}_2 + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

то получается просто

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{2\pi}{\Sigma} \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

и это соотношение легко «выносится» в вакуум (ср. задачу 3 из четвертой лекции). Эволюция идет так, как будто бы первоначальное распределение тока в листе удаляется от плоскости наблюдения $z = 0$ с постоянной скоростью $\Sigma/(2\pi)$. При этом детали начального профиля B забываются аналогично диффузии при обычном скин-эффекте, только скейлинг расплывания уже линеен по времени: $r \sim \Sigma t$ (но эволюция совсем не похожа на волновую!).

ЛЕКЦИЯ 11

Турбулентность с широким инерционным интервалом, закон Колмогорова–Обухова. Относительная диффузия и закон Ричардсона. Усреднение по реализациям. Специфика статистики. Размешивание лагранжевых инвариантов.

Однако главная проблема теории скрывается не в виде эффективных уравнений и не в характере стохастичности транспортного процесса, а в наличии того и другого как таковых: а есть ли в темной комнате наших размышлений кошка, которую мы ловим, иногда, причем, весьма успешно? Не стоит ли взглянуть на добычу попристальнее?

На самом деле так называемая развитая (та, что не до конца понятия) гидродинамическая (несжимаемая или вихревая) турбулентность устроена не по разобранным выше схемам. Ее главным атрибутом является наличие широкого спектрального (или «инерционного») интервала (т. е. отсутствие какого-либо одного универсального вихревого масштаба λ) со «стационарным» (все-таки флуктуирующим) уровнем пульсаций скорости, живущим в нестационарном режиме — с протоком энергии от больших масштабов к малым за счет нелинейности $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ или, если угодно, $[\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}]$. Его источником при λ_{\max} является какая-то глобальная «мешалка» (например, циклоны/антициклоны в атмосфере или синоптические вихри в океане, бриз на берегу озера, глобальный циркуляционный вихрь в комнате, на худой конец годится и ложечка в стакане с чаем), а поглотителем при $\lambda_{\min} \ll \lambda_{\max}$ обычная вязкость, пренебрежимо малая в динамических процессах внутри инерционного интервала. Тут требуется совершенно иная идеология описания.

Стандартный подход с весьма солидной и славной историей берет на вооружение *скейлинг Колмогорова–Обухова*. Вывод его базируется на следующих предположениях о характере турбулентного процесса: а) его однородности и изотропии — все «рассироплено» по пространству, и события в одном месте не отличаются от таковых во всех других, и б) эстафетности перекачки по масштабам — транспорт энергии локален и потому может быть описан в терминах сохраняющегося сквозного потока \hat{Q} , в силу пункта а), одинакового в каждой «точке» обычного пространства. В пользу последней гипотезы можно привести соображения о хорошем взаимодействии лишь близких по размеру вихрей (из-за квазирезонанса их частот, непосредственное же воздействие больших на маленькие адиабатически медленно и вряд ли способно к сколько-нибудь заметной их «раскрутке»). Первое предположение позволяет оперировать только с фурье-амплитудами, наплевав

на фазы (так называемая «кинетичность» описания), второе сильно сужает число параметров задачи, сводя их к одной интенсивности процесса. В принципе, задает ее источник, но исторически принято выражать \hat{Q} через темп удельного, нормируемого на единицу массы среды, поглощения в стоке ε , что эквивалентно в силу сохранения потока в промежуточной спектральной области.

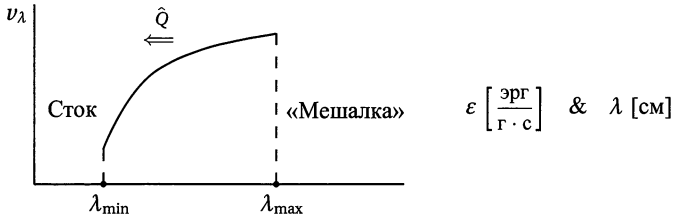


Рис. 1.36. Колмогоровский спектр &

В качестве инструмента для теоретического описания явления и определения искомого спектра пульсаций скорости используется анализ задачи по размерности: считается, что характер поведения v_λ зависит только от двух параметров: интенсивности процесса ε и, собственно, текущего масштаба λ (рис. 1.36). Возможна только одна их правильная по размерности комбинация, складывающаяся в колмогоровский скейлинг

$$v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3}. \quad (1.48)$$

Отсюда же следует простая оценка на диапазон существования режима в терминах чисел Рейнольдса $Re = v_\lambda \lambda / \nu$:

$$1 \sim Re_{\min} < Re_\lambda < Re_{\max} \sim \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{4/3}.$$

Обычно мешалка достаточно мощна ($\varepsilon \sim v_{\max}^3 / \lambda_{\max}$ велико) и действительно обеспечивает $\lambda_{\max} \gg \lambda_{\min} \sim (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$. Иногда скейлинг записывают для квадрата скорости в интервале dk (его размерность [$\text{см}^3 / \text{с}^2$]):

$$(v^2)_k dk \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} dk$$

и тогда называют *законом 5/3*.

Нестационарность процесса оценивается из примерного баланса двух слагаемых в dv/dt и равна $\omega_\lambda \sim v_\lambda / \lambda$ (что соответствует введенному в прошлой лекции параметру $T_\lambda \sim 1$). Грубый, но меткий скейлинговый язык Колмогорова–Обухова оказался очень удобным

в теории и достаточно хорошо в определенных аспектах соответствующим реальности в эксперименте, но в данном контексте нам важно прежде всего кардинальное отличие описываемой им ситуации в смысле транспорта от уже пройденных.

Конечно, на масштабах $\lambda > \lambda_{\max}$ наработанные ранее методы и понятия вполне адекватны, но внутри инерционного интервала все не так. Главная неприятность заключается в том, что амплитуда пульсаций растет с увеличением λ , поэтому в сносе скаляра доминируют гармоники вблизи правой границы спектра на рис. 1.36, т. е. с длиной «волны» (правильнее, конечно, говорить о периоде гармоники поточковой функции), много большей пройденного частицами расстояния. С другой стороны, $\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ становится «стохастичным» (как не определяй это понятие) из-за вариаций амплитуды и фазы лишь при $r \gg 1/k$, $t \gg 1/\omega$. В результате конвекция частиц на этой стадии носит в основном регулярный характер, т. е. не хаотична и не может быть описана в терминах каких-либо усредненных уравнений. Мелкий «дребезг» траектории не виден и, что существеннее, не важен на фоне $v_{\max} t$. Парадигма окончательно отказывает, концепция заходит в тупик, здесь уже не обойтись ни косметическим, ни капитальным ремонтом. Построенное следует бросить и начать сооружение новых зданий с нулевого цикла — с фундамента, благо геодезическая разведка местности уже выполнена (см. (1.48)).

Собственно, эти проблемы «настоящего» турбулентного транспорта были осознаны достаточно давно, и пути выхода из кризиса намечены еще на заре исследования этого явления. Базой послужили (и служат по сей день) две пионерские идеи замечательного исследователя Ричардсона (L. Richardson), сформулированные им в 1926 г. В них сконцентрировались новая идеология подходов и инструменты описания, стратегия и тактика развития теории.

Первая — это конструктивное понятие *относительной диффузии*. Идея заключается в том, что детали движения виднее изнутри, а не снаружи, находящийся в несущейся куда-то толпе человек гораздо острее стороннего наблюдателя ощущает ее хаотические конвульсии на фоне направленного передвижения: хочешь информации — в гущу народа. Было предложено рассмотреть процесс расхождения друг относительно друга пары первоначально близких частиц в облаке скаляра. Ясно, что все гармоники с масштабом, большим текущего расстояния между ними, сносят их одинаково и потому вычитаются при взятии разности координат: смотрим $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$, в то время как существенно более «коротковолновые» малы по амплитуде, так что основной вклад в динамику дают v_λ в каждый данный момент

примерно с тем же пространственным периодом, что и изучаемое расстояние, поэтому

$$\dot{R} \sim v_R \propto R^{1/3} \rightarrow R \propto t^{3/2} \quad (1.49)$$

(частицы в среднем именно расходятся, а не сближаются вследствие специфического свойства турбулентного движения — динамической неустойчивости и экспоненциального разбегания близких траекторий). Это знаменитый закон Ричардсона, он же уже закон 3/2. Сейчас его принято теоретически выводить из спектра Колмогорова–Обухова, но исторически он был найден на 15 лет раньше и на основе обработки экспериментальных наблюдений за расхождением шаров-зондов и распыления облаков вулканической пыли. Сам Ричардсон утверждал его очень хорошую точность на впечатляющем диапазоне расстояний от десятков метров до десятков тысяч километров.

Несмотря на, казалось бы, «техничность» исходных побуждений (скомпенсировать крупномасштабный снос), относительная диффузия как всякое глубокое понятие имеет ясный физический смысл: именно этот процесс определяет форму облаков. Тем не менее, взятая отдельно, она, существенно улучшая ситуацию, еще не спасает положения. Дело в том, что такое относительное расхождение в каждый момент времени все равно регулярно (отсутствует запас $R \gg 1/k$, см. выше) и эволюция «парной» системы по-прежнему не стохастична и не описывается статистикой. Реальная турбулентность небанально случайна!

Вторая идея заключается в использовании приема *усреднения по реализациям*, кардинально переводящего процесс в желанную статистическую область. Его смысл — в изучении не того, что происходит с данным облаком сейчас, а всего лишь характерных черт распыления разных облаков, «впрыснутых» в турбулентную среду в разные моменты времени (вчера, сегодня, завтра), между которыми картина течения существенно меняется (т. е. $\Delta t \gg 1/\omega_{\min}$). Разделенные такими промежутками отдельные «реализации» турбулентности вполне случайны и не скоррелированы между собой, а потому все и выходит на статистическую стезю. Теперь мы добились своего, но какой ценой?

Возникающие проблемы лежат сразу в нескольких плоскостях. Во-первых, весьма сложной становится техническая сторона дела. Для усреднения надо знать распределение вероятностей отдельных реализаций по объему в занимаемом ими функциональном пространстве векторных полей, в своих основах теория вероятностей эквивалентна теории меры. Однако математика говорит, что очень непросто ввести понятие меры (не нормы, аналога расстояния) в бесконечно-

мерных пространствах. Во-вторых, смещается идеология в соответствии модели реальности. Произошла ведь подмена задачи, природе задаются другие вопросы — вместо расплывания данного облака из реальных частиц изучается расширение чего-то, составленного из абстрактных точек-представлений многих облаков $R_i(T)$, каждая из которых представляет собой конец вектора, соединяющего частицы в какой-то паре. Эволюция такой системы есть результат совмещения на одном экране разных «траекторий» относительных расхождений, полученных в разных экспериментах и в разное время, но приведенных к единым началам отсчета R и T . В нефизическом экранном пространстве-времени нет физических ориентиров, нельзя гарантировать, например, отсутствие явных зависимостей коэффициентов искомого усредненного уравнения от R , T даже в исходно (в обычном пространстве) однородной задаче.

Самое забавное и поучительное, что по поводу ответа в этой проблеме (конкретного вида эффективного уравнения для относительной диффузии) до сих пор дискутируют, и похоже, что оно опять-таки записывается в дробных производных! Тем не менее, оперирование с введенными понятиями в данной области пока неизбежно, их неидеальность проистекает не из недомыслия исследователей, а из сложности природного явления. Это как раз тот случай, когда мы должны корректировать свои идеалы, а не пытаться навязать их реальности.

Вглядимся в усреднение по реализациям внимательнее. Это чрезвычайно распространенный теоретический прием, представляющий собой мощнейший стохастизатор и универсализатор процесса, широко используемый и далеко за рамками задач об относительной диффузии. Повторим, что без него сиюминутные ситуации принципиально разнятся друг от друга, и их изучение требует всей полноты информации о системе, что делает ответы и трудно выводимыми, и плохо обозримыми. Вчера ветер был западный умеренный, сегодня северный порывистый, а завтра вообще обещают штиль — куда податься бедному физику, который принципиально работает с закономерностями, а не раритетами? Надо заставить процессы, пусть даже с применением силы, проявляться совместно. Но главное — при этом не обмануться, осознать меру искусственности навязанного поведения. И производителям теоретических моделей, и их потребителям следует отдавать полный отчет о возможной специфике. Рассмотрим два принципиальных момента.

Представим себе, что в комнате каждый вечер происходит, скажем, выброс эктоплазмы в форме привидения Каспера. На прошлой неделе во вторник он появился на книжном шкафу, в четверг — под диваном, а в субботу в углу у телевизора. Каждый раз стук был вполне ком-

пактен, невелик и имел четкую форму (рис. 1.37). После усреднения по многочисленным явлениям распределение эктоплазмы становится бесструктурным, однородным и малоплотным. Следует ли отсюда, что вошедший в комнату человек увидит что-то подобное? С другой стороны, крайне правая картина верно говорит о том, что зонд для обнаружения Каспера можно с одинаковой успешностью помещать в любую точку комнаты, вот только замеряемая концентрация будет как правило равна 0, а изредка значительно превышать нарисованный фон. Например, в более жизненной ситуации выброс каких-либо загрязнений как правило «садится» на местность очень пятнистым образом, но пятна от случая к случаю меняются местами.



Рис. 1.37. «Размазывание» структур при усреднении

Взглянем теперь на классический стохастический процесс — диффузионное блуждание частиц по прямой. Приходя в любой из изображенных на рис. 1.38 узлов, они с равной вероятностью могут двигаться далее влево или вправо, но этот случайный сценарий может быть организован по-разному. В стандартном варианте для каждой

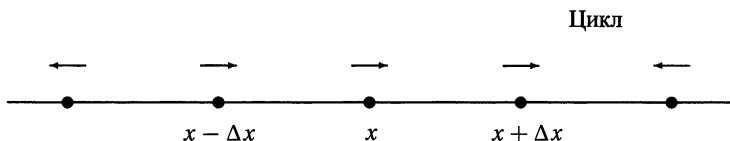


Рис. 1.38. «Замороженные» вероятности в блуждании

новой частицы, прибывающей в узел, вероятности разыгрываются по новой, т. е. кости бросаются индивидуально. Однако, возможен случай, когда направления движения определяются случайным образом, но однократно. В такой конкретной реализации случайного процесса все частицы, попадающие в разное время, например, в точку x , движутся из нее исключительно вправо. Прямая оказывается разбита на отрезки различной длины с односторонним движением, на границах которых при определенной взаимной ориентации динамика приобретает циклический характер (рис. 1.38). В результате начальное облако частиц не расплывается монотонно по Гауссу, а собирается в узкие

пики в таких циклах-ловушках. Наложение на один экран множества реализаций идентично обычной картине, что не вполне безобидно.

В англоязычной литературе для должного разграничения специфики используются специальные термины *annealed vs quenched disorder*. Очень важно понять, происходит ли в данном конкретном случайном процессе самоусреднение/стохастизация — например, затравочной диффузией — или оно (усреднение) насильственно навязывается извне. Иногда конкретная реализация вполне усреднима в интересных нам проявлениях, скажем, в «турбулентном» полосовом течении из прошлой лекции разбаланс $\sim \sqrt{N}$, нужный для супердиффузии, присутствует с вероятностью $p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$, хотя изредка (с $p \rightarrow 0$) возможен вариант, в котором все потоки вообще направлены в одну сторону...

С другой стороны, практически всегда плох не прием, а неумелое его использование. Работа в рамках теории вероятностей вообще дело тонкое. Для статанализа необходимо использовать любую, пусть гипотетическую (но тогда с жестким контролем задним числом) дополнительную информацию о характере исследуемого случая. Например, предварительное знание о симметрии подбрасываемой монеты очень полезно для изучения его последствий, ибо никакое количество экспериментов не позволит нам заключить, что вероятность выпадения герба для нее равно $1/2$, а лишь оценить это число с некоторой вероятностью же. Априорное знание помогает выбрать наиболее эффективную методу из богатого математического инструментария. Свет клином не сошелся на одном среднем. Например, для распределений с большой неравномерностью, когда существенный вклад в математическое ожидание дает малая группа, эффективной характеристикой является медиана — случайная величина принимает значение, меньшее (большее) ее, с вероятностью $1/2$. Особенно информативно одновременное вычисление и сопоставление среднего и медианы. Скажем, при определении уровня жизни населения по душевому доходу, когда один миллиардер очень заметен даже на миллионном фоне, такое сравнение поможет избежать неправильных выводов. И для сильно неоднородного распределения грязи (или золота) по местности соотнести среднюю плотность с плотностью, наблюдаемой на половине площади, тоже будет не вредно. А можно выявлять пикированность и сравнением со средним квадратом (см. ЭМГ-сопротивление).

Не менее важно действительно осознать такой расхожий факт, что $\langle f(x) \rangle \neq f(\langle x \rangle)$. Всегда следует задаваться вопросом, что дает вклад в изучаемый процесс — среднее (как у распределения Гаусса в степенных моментах $\langle x^n \rangle \sim \langle x \rangle^n$) или отклонения (флуктуации) от него (как в переносе полосовым течением Дрейзина–Дыхне или в тепловы-

делении при ЭМГ-сопротивлении)? Существует ли среднее вообще? Изменению может подвергаться не коэффициент, а сам скейлинг: например, радиоактивность от ядерного взрыва спадает по закону $\propto t^{-\alpha}$ с $\alpha \approx \log_7 10 \sim 1,2$ (т.е. уменьшается в 10 раз при семикратном увеличении времени), а вовсе не $\exp(-\langle\gamma\rangle t)$ с любым $\langle\gamma\rangle$, т.е. в каждый данный момент времени основной вклад в фон дают изотопы с $\gamma \sim 1/t$.

И в выборе используемых распределений стоит смотреть на вещи шире. Статистика бывает разной, не все сводится к «привычному» Гауссу. Закон больших чисел не универсален! Да, вычисляемое из наблюдений отдельных значений случайной величины x_i среднее $\mu_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^N x_i/N$ старается быть распределенным по Гауссу вокруг истинного среднего μ при достаточно широком классе исходных функций распределения $f(x)$, однако, во-первых, только в бесконечном пределе (если f исходно не гауссово), во-вторых, только при конечной дисперсии $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 f dx$, и, в-третьих, исключительно при конечном же μ .

Математики сразу же после доказательств так называемой центральной предельной теоремы в разных вариантах задались вопросом о том, что происходит за ее пределами: отсутствие $\sigma \not\rightarrow \infty$ в жизни встречается чаще, чем в учебниках, догматизм опасен. Степенные «хвосты» у реальных f бывают в самых разных областях жизни, например, в физике таково распределение космических лучей по энергии, в социологии — верхушки общества по богатству (так называемый хвост Парэто — V. Pareto), в лингвистике — частоты использования слов по номеру из списка (закон Зипфа — G. Zipf). Было интересно, а есть ли вне ЦПТ хоть что-то единое, или все сплошь индивидуально? Оказалось, что здесь живут *устойчивые распределения*. Как Гаусс других они не притягивают, но себя в стандартной процедуре исчисления μ в отличие от всех остальных обитателей блюдут — и x_i , и \sum_i при $\forall N$ распределены одинаково (и в этом смысле распределение Гаусса является их частным случаем), что опять-таки напоминает отдельные кочки в неуниверсальном болоте. Именно они возникают при решении стохастических уравнений в дробных производных.

Но особенно кардинальны изменения при $\mu \rightarrow \infty$, что имеет место при так называемых «тяжелых хвостах» f . Естественно, это свойство не означает, что наблюдения дадут нам $x_i = \infty$ (вероятность обнаружить $x > M$ стремится к 0 при $M \rightarrow \infty$, поскольку $\int f dx$ сходится). Но что мы увидим? Если двигаться в сторону повышения «тяжести» постепенно, то с переходом границы $\sigma \rightarrow \infty$ сначала повышается степень «разбалтывания» (уровень флуктуаций) наблюдаемой \sum_i отно-

сительно среднего, а затем, при $\mu \rightarrow \infty$, модифицируется и скейлинг самой суммы

$$\sum_{i=1}^N x_i \approx \begin{cases} \mu N \pm \text{const} \cdot N^{1/\nu}, & 1 < \nu < 2 \\ \text{const} \cdot N^{1/\nu} [1 \pm O(1)], & \nu < 1 \end{cases} \quad (1.50)$$

причем в последнем случае основной вклад в Σ вносят лишь несколько членов (в отличие от $\nu > 1$, когда таких членов $\sim N$). Это можно заметить, но при небольших N и исходном представлении об обязательности конечных μ легко обмануться. В результате, на что обратил внимание А. М. Дыхне, если прогнозировать последствия будущих аварий из накопленного в прошлой эксплуатации ущерба Σ_i и веры в его линейность, то последствия будут печальны — и урон предстоит куда серьезнее, и, что особенно важно, нанесен он будет несколькими «суперкатастрофами». Особенно плохо, что так происходит на каждом этапе увеличения t снова и снова: неприятности идут по нарастающей в цепи супер–супер, супер–супер–супер и т. д. инцидентов. Тяжелые хвосты тяжелы и по последствиям.

Вернемся, однако, к реальной турбулентности. Ее проблемы отнюдь не исчерпаны, и пока упомянуты далеко не самые главные среди них. Наиболее печально (или интересно), что исходные, столь удобные предположения о ее устройстве не верны. Если и можно что-то с уверенностью утверждать о ее характере, так это то, что в жизни она неоднородна и неизотропна. Да, закон (1.48) хорошо ложится на экспериментальные точки, но и здесь приходится вводить эмпирические поправки типа $1/3 + \epsilon$. Наблюдение же высших степеней скорости зачастую свидетельствует об очень большой пикированности распределения ее в пространстве (например, в $(v^4)_k \sim A\epsilon^{4/3} k^{-7/3}$ коэффициент может достигать $A \sim 10^3$). Это свидетельствует о собирании пульсаций в какие-то кластеры и не слишком хорошей адекватности выбрасывания фаз гармоник Фурье. Турбулентность «структурна» и «памятлива», скейлинга для ее описания явно недостаточно.

Главный атрибут этого явления, процесс измельчения масштабов, заключающийся в $|\text{rot } \mathbf{v}| \rightarrow \infty$ в рамках динамического уравнения (или уравнения в замороженности) идеальной жидкости, приводит к тому, что генерируемые особенности ротора представляют собой как раз сосредоточенные структуры (ср. с токовыми слоями в ЭМГ), занимающие малую долю пространства. В каждый данный момент времени они могут лежать на поверхностях, линиях или даже (скорее всего) на фрактальных объектах. Поглощение энергии в любой фиксированной области жидкости происходит отдельными «вспышками» в те моменты, когда нарастающая здесь взрывным образом особенность (вообще говоря, $|\text{rot } \mathbf{v}| \stackrel{t \rightarrow t_0}{\sim} 1/(t_0 - t)$) достигает границы $\text{Re} \sim 1$ и диссипирует,

в промежутках этот процесс идет в других областях. Равномерность процесса перекачки энергии имеет место лишь в среднем, а в каждый отдельный момент характерна как раз огромная неоднородность распределения текущего \hat{Q} как функции \mathbf{r} . Это явление (неоднородность в пространстве и времени) иногда называют *перемежаемостью*.

Любопытно, что в двумерии стремление $|\text{rot } \mathbf{v}| \rightarrow \infty$ невозможно, ибо ротор здесь является лагранжевым инвариантом, переносимым течением из точки в точку, но ничуть не увеличиваемым. В 2-d поток энергии идет в противоположном направлении — от малых масштабов к большим, рождаются глобальные вихри. Тем не менее, колмогоровский спектр (и ричардсоновский снос) описывает такую ситуацию в эксперименте даже лучше, чем в 3-d варианте, по-видимому, именно из-за отсутствия мелкомасштабных структур и хорошей размазанности процесса по плоскости.

«Рассыпание» казалось бы хаотичного, недаром носящего имя турбулентного, процесса на явно выраженные образования не должно удивлять. Даже простая, настоящая стохастичность структурна, рисуемые с помощью бросания монеты фракталы типа рис. 1.31 демонстрируют явную «кластерную» природу. Звездное небо над нами состоит из созданных игрой случая созвездий. Если уж пассивное сложение гармоник с хаотическими фазами дает такой эффект, то что говорить о сильном их взаимодействии. Корреляция фаз является важнейшим моментом в жизни турбулентности, кинетический подход ей не адекватен. Представление о небанальности такого хаоса растет. Похоже, сколько-нибудь эффективное описание явления должно в обязательном порядке соединять динамичность со статистичностью, а может быть, и вытеснять последнее. Но как тогда быть с неуниверсальностью? Природой положен предел нашим чаяниям.

Турбулентные равномерные распределения

Нерешенность необходимых предварительных задач и нерешаемость в результате проблемы устройства турбулентного транспорта не должны смущать подготовленных исследователей. Надо всего лишь еще раз проявить инициативу, развернуть фронт атаки и сменить парадигму заодно с концепцией. Ну и пускай мы пока не много путного можем сказать об этом явлении в общем виде, не очень-то и хотелось, нам интересен не процесс переноса, а его результат. В конце концов, когда мы мешаем ложечкой в стакане с чаем, то разве задумываемся о том, что и как там происходит? Мы просто знаем, что «на выходе» получим равномерно сладкий напиток. Давайте смотреть это состояние равномерности, ясно, что время, потребное для его формирования, убывает с ростом интенсивности конвекции.

В новых обстоятельствах на первый план выходит новый вопрос. Да, мы равномерно размещали, но что? Ответ на него очевиден — в любых (в том числе и сжимаемых) достаточно «хаотических» течениях это лагранжевы инвариант, эволюционирующий согласно

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Lambda = 0.$$

Действительно, турбулентность «месит» среду, распределяя наполняющий ее «изюм» по пространству и переводя его в состояние $\Lambda = \text{const}$ (именно это в действительности давно известное явление по предложению В. В. Янкова удобно называть турбулентным равномерным распределением или ТРР). Но ситуация здесь не вполне тривиальна. Оказывается, что в присутствии какой-либо внешней неоднородности системы хорошее размешивание Λ может, наоборот, приводить к непостоянству других важнейших физических параметров: ведь далеко не всегда нас интересует именно лагранжевы инвариант.

Наглядным примером такой комбинации служит наша атмосфера, находящаяся в процессе постоянного перемешивания по вертикали. Оно идет достаточно быстро, обмен теплом между поднимающимися и опускающимися воздушными массами незначителен. Лагранжевым инвариантом в такой адиабатической конвекции является энтропия S (см. первую лекцию), т. е. в хорошо «перемешанном» режиме $P \propto \rho^\gamma$, а $T \propto \rho^{\gamma-1}$ (для воздуха $\gamma = 7/5$). Изэнтропичность состояния позволяет записать следующее термодинамическое соотношение

$$\frac{dP}{n} = dW = c_p dT, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Неоднородность же системы связана с наличием в ней силы тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_x$ и ее уравновешиванием градиентом давления

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g = -M_{\text{возд}} n g.$$

Простая комбинация формул дает следующее ТРР для такой важной для населения характеристики земной атмосферы как температура

$$T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} M_{\text{возд}} g (x_0 - x),$$

или убыль $10^\circ/\text{км}$. В реальности из-за подогрева в результате конденсации водяных паров в как правило влажном воздухе градиент обычно составляет порядка $6^\circ/\text{км}$, но это все равно именно линейный профиль $T(x)$.

Важно подчеркнуть сильные отличия этого ТРР от стандартного больцмановского распределения из учебников. Оно обладает четкой

границей ($n, T \equiv 0$ при $x > x_0$) на сравнительно небольшой высоте, поэтому полная масса планетной атмосферы получается конечной и небольшой, в то время как у Больцмана есть неустранимый парадокс, связанный с конечностью «равновесной» концентрации на бесконечности. Такие ТРР распространены практически повсеместно. Скажем, на последних 30% радиуса Солнца тепло доставляется к его поверхности именно конвекцией (т. е. в нее вовлечено почти 2/3 его объема, но гораздо меньшая доля массы). Экспериментальные (определяемый по сейсмоколебаниям) профили в конвективной зоне практически идеально ложатся на теоретическую ТРР-зависимость (естественно, с тамошним уравнением состояния). Именно благодаря такой степенной зависимости мы видим резкий край солнечного диска, «по Больцману» картина была бы диффузной.

Возвращаясь к лабораторным ситуациям, в рамках сформулированной проблемы поучительно рассмотреть двумерную плазму в магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ в приближении МГД (пример В. В. Янькова). Ее течения (опять-таки, не обязательно несжимаемые) в плоскости x, y приводят к следующей эволюции параметров

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{div} B\mathbf{v} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{B}{n}}_{\Lambda} = 0$$

(ср. задачу 3 в лекции 5). Здесь задействован общий принцип построения лагранжева инварианта из двух плотностей сохраняющихся величин. Если конвекция происходит в периферийной области, где концентрация плазмы мала, а поле, наоборот, велико, то у среды не хватает энергии для сколько-нибудь заметного возмущения \mathbf{B} , поэтому его можно считать заданным: $B = B(x, y)$ (неоднородность создается внешними катушками). Это значит, что турбулентная плазма, размещиваясь, стремится к $n \neq \text{const}$.

Вывод, который можно извлечь из завершающегося рассказа, прост: гибкость, гибкость и еще раз гибкость — как в постановках задач, так и их решении. Бессмысленно искать в болоте хайвей, но пересекать его приходится.

ЗАДАЧИ

1. По сравнению с чем должна быть велика мощность мешалки ε , чтобы обеспечить большую ширину инерционного интервала $\lambda_{\max} \gg \lambda_{\min}$?
2. Вывести барометрическую формулу, описывающую закон уменьшения давления воздуха с высотой, для обычного шестиградусного градиента T .

Решение. Все определяется двумя соотношениями

$$\frac{dP}{dx} = -M_{\text{возд}} g n = -M_{\text{возд}} g \frac{P}{T} \quad \text{и} \quad T = \kappa(x_0 - x)$$

(где $\kappa = 6^\circ/\text{км}$). Если на поверхности Земли $T \sim 300^\circ$, то $x_0 \sim 50$ км. На самом деле использованный скейлинг описывает только тропосферу, выше которой (в стратосфере) практически отсутствуют пары воды и существен подогрев солнечным ультрафиолетом в озоновом слое. Комбинируя эти соотношения, можно получить, что

$$P \propto \left(\frac{x_0 - x}{x_0} \right)^{M_{\text{возд}} g / \kappa}.$$

Поскольку (см. в лекции) $M_{\text{возд}} g \approx 7/2 \cdot 10^\circ/\text{км}$, то показатель степени в выписанном законе с хорошей точностью равен 6. На характерных тропосферных высотах (в средних широтах, см. следующую задачу) в 10 км давление составляет чуть больше четверти своего значения на уровне моря (а концентрация — треть).

3. Насколько сильно варьируется атмосферное давление на поверхности Земли вследствие ее вращения?

Решение. Если посчитать, что центробежная сила, действующая на атмосферу на экваторе, компенсируется перепадом давления от экватора к полюсам, то можно записать, что

$$\rho \frac{v^2}{R} \sim \frac{P}{R} \sim \Delta \rho \frac{v_T^2}{R},$$

где $v \sim 460$ м/с — линейная скорость вращения на экваторе, а R — радиус Земли. Видно, что мерой влияния служит квадрат отнюдь не малого отношения v к тепловой скорости молекул или к скорости звука ($v_T \sim c_S$) в атмосфере. Таким образом, несмотря на незначительность центробежной силы по сравнению с силой тяжести, она очень существенна для равновесного состояния воздушной оболочки.

Во второй части лекционного курса рассматриваются процессы, «быстрота» которых связана с предельной скоростью движения носителей энергии — квантов света. Изучаются элементарные процессы, определяющие термодинамические и кинетические свойства плазмы, приводятся простые экстраполяционные формулы, описывающие рождение, перенос и гибель фотонов в различных режимах и обстоятельствах.

Транспорт излучения исторически занимает весьма заметное место в науке, и представление о его проблематике, несомненно, должно входить в «джентельменский набор» каждого физика. Определенная выделенность данного раздела связана как с объективными внутренними, так и субъективными внешними по отношению к физике вообще причинами. Первые заключаются в красоте и универсальности многих эффектов из этой области. Такие замечательные понятия как нелинейная диффузия, автомодельность, нелокальность возникают в ней наиболее естественным образом, и, следовательно, получить «первичное» представление о них здесь особенно просто. Вторые проистекают из того исторического факта, что мощные научные силы были брошены на приобретение знаний в переносе лучистой энергии и породили основные достижения в связи с созданием ядерного оружия. Вряд ли существует другой физический результат, хоть скольконибудь сравнимый по воздействию на взаимоотношения науки и общества. Да и неизменно удивляющее человека по Канту звездное небо над головой наблюдается им согласно законам генерации и транспорта света.

В данном лекционном курсе речь идет о качественных, «интегральных» характеристиках излучения, поглощения и распространения

ния γ -квантов в плазме в тех случаях, когда эти процессы существенны для полного энергобаланса и влияют на состояние самой среды. Диагностические проблемы, связанные с тонкими количественными особенностями элементарных процессов, сознательно вынесены за скобки. В то же время их специфика, определяющая (а часто и создающая) физически важные детали, по возможности, обсуждается с нескольких сторон. Предпочтение везде отдано простым и наглядным соображениям, выкладки преимущественно носят иллюстративный характер, однако так называемые «практические» формулы для оценок считаются крайне важными и специально приводятся в выделяющих их рамках. Исходя из сверхзадачи курса в нем они не выводятся (коэффициенты переписываются из других источников), а объясняются, главной по-прежнему считается буква, а не цифра. Цель — понять, откуда в точном расчете, используемом для практических прикидок, получается такой ответ и какова цена этого расчета, определяемая не числом значащих цифр после запятой, а сделанными при выводе предположениями.

Здесь опять-таки можно привести три основных источника лекций (и с теми же оговорками):

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
2. *Лисица В. С., Коган В. И.* Атомные процессы в плазме // Итоги науки и техники. Физика плазмы: Сб. — Т. 3. — М.: ВИНТИ, 1982.
3. *Лисица В. С., Коган В. И.* Радиационные процессы в плазме // Там же. — Т. 4. — М.: ВИНТИ, 1983.

Первым номером идет совершенно замечательная книга, которую крайне желательно хотя бы пролистать. Эта классика жанра до сих пор содержит лучшее изложение почти всех затрагиваемых в ней вопросов (например, является отличным введением в гидродинамику вообще). Два других обзора ценны компактностью подачи материала и тем, что в отличие от первого, рассматривают кинетику излучения и в термодинамически неравновесной среде, каковой обычно является горячая плазма. Они также представляют собой образец физического текста. Автору данной книги очень повезло, что он имел возможность поучиться пониманию обсуждаемых в этой части проблем непосредственно у В. И. Когана и В. С. Лисицы.

В принципе, очень полезными для читателя могут быть 12 и 13 выпуски основополагающей серии «Вопросов теории плазмы», но они все-таки предназначены достаточно узкой аудитории теоретиков. Весьма информативным источником сведений о проявлении разнообразных излучательных процессов в космосе был для автора учебник

Засов А. В., Постнов К. А. Общая астрофизика. — Фрязино: Век 2, 2006.

Последняя лекция в данной части посвящена короткому рассказу о роли излучения в задачах УТС, особенно при микровзрывах в импульсных системах. Эти вопросы разобраны, например, еще в одном обзоре из уже упомянутой серии *Бабыкин М. В. Электронный термоядерный синтез // Итоги науки и техники. Физика плазмы: Сб. — Т. 1, ч. 2. — М.: ВИНТИ, 1981.*

Очень физичный анализ излучательных проблем в больших взрывах содержится в *Компанеец А. С. Законы физической статистики. Ударные волны. Сверхплотное вещество. — М.: Наука, 1976.*

Данная область находится несколько в стороне от сферы профессиональной деятельности автора (но, как он надеется, все же не вне сферы его компетенции), число выполненных им здесь работ весьма ограничено. Взгляды на нее в гораздо большей степени по сравнению с предыдущим разделом складывались под воздействием чужих статей и книг (хотя и прочитано их по той же причине гораздо меньше, чем в предыдущем случае), поэтому и список рекомендаций, несмотря на стремление его компактифицировать, получился заметно длиннее, чем в первой части. Автор не видит в том ничего плохого, наоборот, он рад поделиться своим чувством приобщения к интересному, возникавшим (и возникающим) при чтении указанной литературы.

ЛЕКЦИЯ 1

Кинетическое описание квантов. Кинетика и термодинамика черного излучения. Причины равновесности, влияние плазмы. Классификация процессов излучения, поглощения и рассеяния.

Согласно сказанному в новой преамбуле, в данной части будет исследоваться вариант, когда излучение является не просто свидетелем важных событий во внутренней жизни плазмы, но их активным участником. В первую голову здесь представляют интерес не эфемерные нюансы, а грубые энергетические последствия. Из этих обстоятельств следует простой вывод, что в рамках поднимаемых задач световые кванты следует позиционировать как третий равноправный компонент плазмы (любопытно, что, сделав этот шаг в «размножении» составляющих среды, уже трудно остановиться: очень скоро потребуются выделить два электронных компонента, обычный из свободных частиц и, так сказать, «ионный» из находящихся в связанном состоянии вблизи не полностью ободранных ионов, да и ионы одного элемента, но с разным зарядом тоже стоит различать). Тут же возникает важнейший вопрос (ср. начальную лекцию первой части): «Как его описывать?»

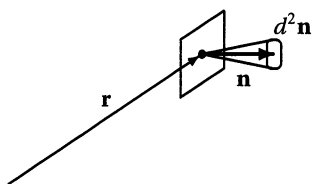
Очевидно, этому объекту по его внутренней сущности адекватен язык квантовой механики/электродинамики, однако всюду ниже используется практически исключительно классический подход — как существенно более наглядный и лучше приспособленный к формированию качественных представлений о явлении. Квантованность возникает лишь в пределах его использования, оказывается, что главное при таком сознательном нарушении правил — вовремя остановиться в классических претензиях, не перейти границ допустимого физикой, не отщепить ничего меньше кванта. Без сомнения, здесь скрывается большая опасность, поскольку выбор средств описания продиктован не объективной логикой, а некими субъективными «внутренними» потребностями. На самом деле такая «наглядность» — вещь обоюдоострая, природе нет дела до нашего мнения о том, что и как проще себе вообразить. Это она диктует нам, с чем следует разобрататься, «простые» представления отнюдь не имманентно присущи нашему мозгу, а возникают на основе тяжелых и напряженных попыток понять и описать наблюдаемые факты. В определенном смысле выстраивание наглядной и качественной картины явлений происходит за счет паразитирования на точных и строгих работах (иногда и своих собственных). С другой стороны, «настоящая» наглядность, будучи выработанной, прекрасно дополняет теоретический инструментарий и вовсе не тупо следует за строгостью, а зачастую сама ведет ее в необходимом физике направлении.

Как указано в части 1, классическое описание привычных электронного и ионного компонентов использует либо гидродинамику, либо кинетику. Первая «проще» и опять-таки нагляднее, но требует наличия каких-либо дополнительных факторов, коллективизирующих поведение отдельных частиц. К сожалению, специфика фотонного газа вынуждает задействовать исключительно кинетику: как раз единство поведения («законы толпы») излучения плохó, частоты электромагнитных волн самостоятельны и индивидуалистичны. γ -кванты никак не взаимодействуют друг с другом (в рассматриваемом диапазоне параметров) и абсолютно не способны к самоорганизации. Эта особенность сквозным образом проходит через весь курс. Новый компонент нелегко описывать, но следует помнить, что физическая черта, усложняющая теорию, может упростить решение экспериментальных задач.

Итак, теории нужны кинетические характеристики системы. Очевидно, первична и универсальна функция распределения f , которая, будучи умноженной на элементарный фазовый объем

$$f(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{r}, t) d\omega d^2\mathbf{n} d^3\mathbf{r},$$

представляет собой число квантов, находящихся в элементе обычного пространства $d^3\mathbf{r}$, спектральном интервале $(\omega, \omega + d\omega)$ и движущихся в элементе телесного угла $d^2\mathbf{n}$ (из общих 4π) вокруг единичного вектора \mathbf{n} . В отличие от обычных частиц (ср. (1.7)) фотоны принято вместо бесконечно малого объема в импульсном пространстве $d^3\mathbf{p}$ (и тем более в скоростном $d^3\mathbf{v}$) относить к элементу $d\omega d^2\mathbf{n}$, «скроенному» из полной энергии и направления полета — поскольку их скорость в вакууме всегда $c = \text{const}$.



$$I_\omega(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) d^2\mathbf{n} d\omega = \hbar\omega c f d^2\mathbf{n} d\omega$$

Рис. 2.1. К определению спектральной интенсивности

Но исторически сложилось так, что в описании именно переноса энергии стандартно работают с производными (в номенклатурном смысле) от f , выделяя у них особо важную зависимость от частоты в самостоятельный индекс. Базовой является *спектральная интенсивность* $I_\omega = \hbar\omega c f$ (рис. 2.1). Это количество лучистой энергии в спектральном интервале $d\omega$, протекающей в единицу времени

через единичную площадку, помещенную в точке \mathbf{r} , перпендикулярно (т. е. максимально «благоприятно» для данных квантов) к направлению распространения энергии, лежащим в телесном угле $d^2\mathbf{n}$ вокруг \mathbf{n} . Эта величина наиболее «приспособлена» для данной тематики. Через нее выражаются другие характеристики, например, *спектральная плотность энергии*

$$U_\omega(\mathbf{r}, t) = \hbar\omega \int_{4\pi\bigcirc} f d^2\mathbf{n} = \frac{1}{c} \int_{4\pi\bigcirc} I_\omega d^2\mathbf{n},$$

равная $4\pi I_\omega/c$ при изотропии излучения, и *спектральный поток энергии* (правильнее, конечно, говорить о плотности потока, но так уж принято)

$$\mathbf{S}_{E\omega}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi\bigcirc} I_\omega \mathbf{n} d^2\mathbf{n},$$

обращающийся при изотропии в 0. Последнее является результатом компенсации, возможно, очень не маленьких встречных потоков, и чтобы их выявить (понять потенцию системы к транспорту энергии) вводят *односторонний поток энергии* через данную (фиксированную наперед безотносительно к движению фотонов) площадку $\mathbf{n}_0 \parallel \mathbf{e}_z$

$$\mathbf{S}_{E\omega}(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}, t) = \int_{2\pi\bigcirc} (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}) I_\omega d^2\mathbf{n} \quad [(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = \cos\theta > 0],$$

где интегрирование идет уже по полусфере. В изотропном случае это не зависит от \mathbf{n}_0 и составляет $\pi I_\omega = U_\omega c/4$ (в данном случае удобно выбирать элемент телесного угла в сферической системе координат $d^2\mathbf{n} = 2\pi \sin\theta d\theta$) со стандартным множителем 1/4 (число частиц изотропного газа, проходящих в единицу времени, скажем, слева направо сквозь единичную площадку, есть $n\langle v \rangle/4$).

Аналогичные характеристики, полученные суммированием по всем частотам за счет $\int d\omega$ (на «выходе» нас интересует именно интегральный, глобальный эффект), теряют индекс ω : I , U , \mathbf{S}_E или S_E , равно как и эпитет «спектральный».

Для привыкания к языку стоит поговорить на нем про знакомый объект: равновесное черное излучение. Как известно, оно характеризуется единственным переменным параметром T и подчиняется статистике Бозе–Эйнштейна с нулевым химпотенциалом, так что число квантов в данном спектральном состоянии есть

$$n_\omega = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}.$$

Если учесть, что число приходящихся на них мод описывается формулой

$$2 \cdot \frac{\hbar^3 d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}),$$

где двойка в числителе соответствует двум равноправным поляризациям, а знаменатель определяет размер одной элементарной (вот она — квантованность) «клетки» фазового пространства, и принять во внимание соотношения $d^3 \mathbf{k} = k^2 dk d^2 \mathbf{n}$ и $k = \omega/c$, то можно записать, что $f_{\omega b} = n_{\omega} \omega^2 / (4\pi^3 c^3)$ (индекс b означает «blackbody»). Следовательно,

$$I_{\omega b} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{T}\right) - 1}. \quad (2.1)$$

Описываемое данной формулой распределение называют распределением Планка (рис. 2.2). В нем принято выделять предельные законы Рэлея–Джинса и Вина:

$$I_{\omega b} \propto \begin{cases} T\omega^2, & \hbar\omega \ll T \\ \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right), & \hbar\omega \gg T \end{cases}.$$

Спектральный максимум у (2.1) находится при $(\hbar\omega)_{\max} \approx 2,8 T$ (а $\langle \hbar\omega \rangle \approx 2,7 T$).

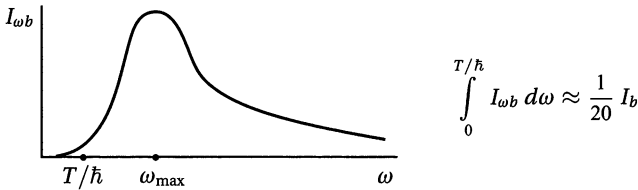


Рис. 2.2. Распределение Планка

Это ставший притчей во языцех пионерский случай существенности квантовых эффектов: $I, U \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \infty$. Если в духе провозглашенной методы просто «обрезать» классический Рэлея–Джинс при $\omega = T/\hbar$, то, как указано на рис. 2.2, интегральное значение I_b будет составлять всего лишь порядка 5% истинного, и эта численная, а не буквенная «перегретость» черного излучения (ср. и ω_{\max}) весьма существенна в практических эффектах. С другой стороны, даже такие расхождения бывают неважными в качественных оценках, особенно если в них удерживать в коэффициенте (2.1) лишь буквы \hbar/c^3 .

Закон Планка отличается сильной зависимостью от температуры: $U_b = 4\sigma_{\text{SB}}T^4/c$, а $S_{Eb} = \sigma_{\text{SB}}T^4$, что также способствует качеству прикидок по порядку величины — при оценке T из численно больших/малых коэффициентов извлекается большой корень. Входящий в формулы коэффициент σ_{SB} носит собственное имя постоянной Стефана–Больцмана и равен

$$\sigma_{\text{SB}} = \frac{\pi^2}{60 \hbar^3 c^2} \approx 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{ЭВ}^4}$$

Это первый пример практической формулы. В выписываемых в них численных коэффициентах температура всегда измеряется в электронвольтах, мощность в ваттах, геометрические размеры (в том числе и при исчислении концентрации частиц) в сантиметрах, а время — в секундах. Такая «каша» систем единиц очень удобна при работе с горячей плазмой. По порядку величины плотность энергии черного излучения соответствует весьма наглядному $U \sim T/\lambda_{\gamma T}^3$ (плотность «упаковки» тепловых квантов соответствует их длине волны, а их энергия — температуре).

На самом деле для равновесного объекта кинетика бывает избыточной, многое следует уже из термодинамики — например, закон $U_b \propto T^4$. Действительно, по своей природе черное излучение подобно насыщенному пару, его энергия $E = U_b(T)V$ (увеличение/уменьшение объема сопровождается адекватным рождением/гибелью частиц). С другой стороны, уже из «школьного» представления о давлении, создаваемом за счет передачи импульса расположенной в плоскости yz стенке отражаемыми от нее частицами $P = n\langle v_x p_x \rangle$ (изменение импульса равно $2p_x$, но в нем участвуют частицы только с исходно $v_x > 0$). В изотропии $\langle v_x p_x \rangle = \langle (\mathbf{v}, \mathbf{p}) \rangle / 3$, и при учете релятивистской связи между импульсом и энергией (все-таки это фотоны, а не простой пар)

$$P = \frac{U_b}{3} \quad \rightarrow \quad E = 3P(T)V.$$

Таково уравнение состояния равновесного излучения. Его подстановка в первое начало термодинамики

$$dE + P dV = \delta Q = T dS \tag{2.2}$$

при $T = \text{const}$ дает $(U_b + P) dV = T dS$ или $4P = T(\partial S/\partial V)_T$. Но

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \rightarrow \quad \frac{4P}{T} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

из чего и следует искомое.

Выписанное термодинамическое равенство просто выводится через технику якобианов

$$\frac{\partial(S, T)}{\partial(V, T)} = \frac{\partial(P, V)}{\partial(T, V)} \frac{\partial(T, S)}{\partial(P, V)} = \frac{\partial(P, V)}{\partial(T, V)},$$

если принять во внимание, что независимость $\partial^2 E / \partial S \partial V$ от порядка взятия производных с помощью (2.2) представима в виде

$$\frac{\partial(T, S)}{\partial(V, S)} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V = \frac{\partial(P, V)}{\partial(V, S)} \rightarrow \frac{\partial(T, S)}{\partial(P, V)} = 1.$$

Впрочем, следующее отсюда равенство единице якобиана перехода от переменных P, V к T, S , использованное выше, и, очевидно, связанное с равенством площадей любого циклического процесса в соответствующих плоскостях, может быть выведено прямым интегрированием (2.2) по произвольному замкнутому контуру

$$\oint dE \equiv 0 \rightarrow \oint P dV = \oint T dS$$

(работа за цикл равна полученному теплу).

Но откуда берется столь удобная для теоретического оперирования равновесность? В отличие от тех же электронов, кванты не способны достичь ее самостоятельно (см. выше), им нужен контакт с внешним термодинамическим резервуаром, задающим «стиль поведения». В стандартном варианте он внешен и в пространственном смысле — граничит с излучением (стенки), но в случае горячей плазмы обычно занимает с ним один объем — это, собственно, ее другие компоненты. Такое отклонение от канонической конфигурации системы, вообще говоря, требует пересмотра базовых положений, использованных при выводе (2.1).

Наличие плазмы существенно разнообразит братство фотонов, в нем присутствуют такие моды как обыкновенные, необыкновенные, магнитогидродинамические и даже продольные волны (а также геликоны, гибридные, дрейфовые и т. д., и т. п.) с весьма своеобразными законами дисперсии. В стандартном же распределении Планка учтены лишь обычные поперечные волны, причем с равновероятной поляризацией, и полностью пренебрежено отличием их скорости от c , т. е. диэлектрическая проницаемость среды положена $\epsilon = 1$. Имеет ли все это отношение к плазме? Да, и самое непосредственное. В дальнейшем будет использоваться именно формула (2.1), и тому есть серьезные основания.

Дело в том, что собственные плазменные частоты, определяющие специфику $\epsilon(\omega)$, как правило низки по сравнению с тепловыми: ска-

жем, даже для весьма высокочастотной электронно-ленгмюровской моды $T \gg \hbar\omega_{pe}$ (полезно знать, что $\hbar\omega_{pe} \sim 1$ эВ при $n \sim 10^{17}$ см $^{-3}$) означает

$$T \gg \sqrt{\mathcal{E}_F \mathcal{E}_{кул}},$$

где \mathcal{E}_F представляет собой энергию Ферми, а $\mathcal{E}_{кул}$ — характерную энергию межэлектронного кулоновского взаимодействия

$$\mathcal{E}_F = \frac{p_F^2}{2m} \sim \frac{(\hbar n^{1/3})^2}{m}, \quad \mathcal{E}_{кул} \sim e^2 n^{1/3}.$$

Иными словами, для существенности изменения дисперсии поперечных волн и заметного вклада ленгмюровских колебаний в планковский спектр требуется либо вырожденность $T < \mathcal{E}_F$, либо неидеальность $T < \mathcal{E}_{кул}$ материнской плазмы, а возможно, и то, и другое вместе. В задачах, связанных с проблемой УТС, среда слишком горяча и малоплотна, и выписанное сильное неравенство выполняется с огромным запасом. Другие собственные частоты обычно еще меньше плазменной (т. е. характерные моды весьма классичны), поэтому влиянием плазмы на свойства «термостатируемых» ею же квантов обычно пренебрегают: она просто «не успевает» откликнуться на такие частоты.

Конечно, внимательность здесь необходима, когда и если вклад собственных мод в тепловую энергию оказывается важным, его надо учитывать. Например, Рэлей–Джинс для ленгмюровских волн дает (ср. (2.1))

$$U_b^1 \approx \int_0^{k_{\max}} \hbar\omega \frac{T}{\hbar\omega} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{T k_{\max}^3}{6\pi^2} \sim \frac{nT}{N_D},$$

где N_D — так называемое дебаевское число, равное

$$N_D \sim n r_{De}^3 \sim \left(\frac{T}{\mathcal{E}_{кул}} \right)^{3/2}.$$

Виновского участка в их спектре не бывает, поскольку область существования по физике дела ограничена обрезанием из-за сильного затухания Ландау на тепловых электронах при $k > k_{\max} \sim 1/r_{De}$.

Хорошо, природа квантов остается неизменной, но влияние среды на их поведение отнюдь не обязано быть малым. Какие же процессы взаимодействия излучения с веществом идут в объеме? При их изучении приходится учитывать возможную неравновесность самого «термостата», выделять разные подсистемы. Прежде всего, следует дать отчет, в чем заключается главная роль фотонов в исследуемых

задачах. В лабораторных условиях — в отличие от звезд и ядерных взрывов — как правило вклад γ -квантов непосредственно в суммарную энергетику невелик. В сопоставлении энергии и давления равновесных фотонов и электронов

$$nT \quad vs \quad U_b$$

все определяется их плотностями (и те другие имеют $\sim T$ на частицу), баланс достигается при $n\lambda_{\gamma T}^3 \sim 1$ или $n \approx 2 \cdot 10^{13} T^3$ (в практическом смысле). Формально эта граница легко переходится. Описанием эволюции плазмы при наличии существенного (и даже доминирующего) прямого энергетического и силового влияния третьего компонента на движение среды в целом занимается радиационная гидродинамика. В качестве примеров практически важных эффектов такого влияния на Земле можно привести ядерные взрывы, а во Вселенной — пульсации цефеид, не так давно очень популярных «стандартных свеч», используемых для определения космологических расстояний, или так называемый *эддингтоновский предел* (A. Eddington) светимости космических объектов, возникающий в теории как следствие противодействия давления излучения гравитационным силам, к чему близко подходят массивные звезды.

Однако обычно при больших температурах излучение не является чернотельным (оно «не заперто», см. ниже) и гораздо менее плотно, так что запас $nT \gg U$ бывает весьма хорош. С другой стороны, поток фотонной (электромагнитной) энергии даже в этом случае может быть громаден: кванты быстро бегают — $c \gg v_{Te}$. Именно это приближение изучается в данном курсе. Таким образом, в разбираемых случаях роль третьего компонента в энергобалансе плазмы велика, но косвенна.

Для ее анализа предстоит научиться описанию не только собственно взаимодействия квантов и электронов (как наиболее легких, а потому «близких» по свойствам частиц), но и термодинамики с кинетикой исходной плазмы, пытающейся «приготовить» соответствующий себе третий компонент. Фактически все упирается в символически очень коротко записываемую реакцию



Правда, очень часто в ней в качестве своеобразного «катализатора» присутствует и что-то еще — при отсутствии γ или γ' это просто обязательно, без него процесс не идет.

Для характеристики (2.3) используется классификация по происходящему в реакции с квантом — выделяют рассеяние и поглощение-излучение, и с электроном, изменяющим всего лишь свой энергетический уровень. Здесь говорят о свободно-свободных, свободно-

связанных и связанно-связанных переходах. Эти процессы имеют совершенно разные интенсивности (вероятности) и частотные зависимости, порождая непрерывный или дискретный спектры плазменного излучения.

Схема дальнейшего продвижения проста. Сначала несколько лекций посвятим взаимодействию с позиций γ -квантов, когда электроны выступают как внешний фактор, определяющий законы поведения фотонов в среде и варьирующийся от случая к случаю. Затем перейдем на позицию электронов и проанализируем природу и особенности этих теперь уже не заданных, а вычисляемых характеристик плазмы, «управляющих» кинетикой фотонов, замкнув тем самым рассмотрение.

ЗАДАЧИ

1. Как изменилось бы уравнение состояния для излучения, если бы его плотность энергии не зависела не только от объема, но и температуры?

Решение. В этом случае $E = UV$, $U = \text{const}$. Из первого начала следует, что в адиабатическом процессе у такой субстанции

$$dE + P dV = T dS = 0 \quad \rightarrow \quad U dV + P dV = 0 \quad \rightarrow \quad U = -P,$$

т. е. ее давление отрицательно. Как считается, именно такова так называемая темная энергия.

2. Оценить суммарную интенсивность черного ленгмюровского «излучения».

Решение. Поскольку групповая скорость ленгмюровских «квантов» $v_g \sim v_{Te} k r_{De}$, то

$$I_b^l = \int_0^{k_{\max}} v_g \frac{T}{2\pi^2} k^2 dk \sim \frac{v_{Te} n T}{N_D}.$$

Нетрудно заметить, что при такой дисперсии колебаний гораздо удобнее выносить у их характеристик индекс k , а не ω , и, соответственно, относить термин «спектральный» к длине волны, а не частоте.

3. Вклад излучения непосредственно в энергетику может быть силен и в лабораторной плазме. В этих случаях появление нового «игрока» существенно меняет ситуацию и приводит к значительным модификациям привычных формул. Как выглядит условие равновесия Беннета для z -пинча в условиях доминирования давления черного излучения?

Решение. В новых условиях силовой баланс дает

$$\frac{B^2}{8\pi} \sim \frac{U_b}{3} \quad \rightarrow \quad T \sim (\hbar c)^{3/4} B^{1/2}$$

или T [кэВ] $\sim 0,25 \sqrt{B}$ [МГс]. Знакомой «погонной плотности» в ответе уже нет.

ЛЕКЦИЯ 2

Этапы прохождения света сквозь среду. Основное уравнение лучистого переноса в общем случае и в равновесной плазме. Установление равновесия излучения с веществом. Общее решение задачи в базовом варианте.

В данной лекции предстоит вывести новое базовое уравнение — для этой части. Оно должно описывать транспорт квантов в среде. Для достижения цели и вычленения упомянутых в предыдущей лекции «управляющих» параметров удобным оказывается поэтапное «включение» процессов взаимодействия излучения с плазмой и запись необходимых соотношений для каждой присутствующей частоты (кинетики!).

1. Хорошо известно, что если светить через среду вдоль какого-то вектора \mathbf{n} , то на бесконечно малом пути ds кванты изымаются из оборота по стандартному закону «пропорционального отстрела»

$$dI_{\omega}^{-} = -I_{\omega} \frac{ds}{l_{\omega}} \quad \rightarrow \quad I_{\omega} \propto \exp\left(-\int \frac{ds}{l_{\omega}}\right).$$

Уже в этом «расходном» уравнении непосредственно видна указанная ранее идеальная «приспособленность» спектральной интенсивности к описанию переноса лучистой энергии, ибо именно она характеризует как раз кванты, летящие в данном направлении. Причины «децимации» бывают самыми разными, фотоны могут просто исчезать либо менять направление своего полета и/или частоту. Темп убыли зависит от первой «внешней» для излучения характеристики плазмы — длины пробега квантов l_{ω} . Упомянутые в конце предыдущей лекции процессы поглощения и рассеяния дают аддитивный вклад в вероятность выбытия:

$$\frac{1}{l_{\omega}} = \frac{1}{l_{a\omega}} + \frac{1}{l_{s\omega}},$$

аналогично суммируются и вклады различных механизмов в каждый процесс. Пределы варьирования этой важной характеристики или специфика l_{ω} для разных переходов (как раз механизмов) обнаруживаются, как и говорилось, с позиций электронов. Тем не менее, для осознанного продвижения желательно все же иметь о них какое-то первичное представление, поэтому конспективно пробежимся по вариантам.

Поглощение. Если оно происходит при связанно-связанных переходах (т. е. в линиях), то по физике дела вероятность процесса

пропорциональна концентрации ионов, вокруг которых «болтаются» поглощающие электроны, т. е. $1/l_\omega \propto n_z$ (индекс z у концентрации как раз выделяет ионы с фиксированной степенью ионизации, а следовательно и устройством оболочек), и простейший анализ размерностей указывает, что такое взаимодействие квант–ион можно и должно характеризовать сечением или коэффициентом этой пропорциональности $1/(l_\omega n_z)$ [см²]. Естественно, оно будет своим для каждого конкретного иона и конкретного перехода, но, забегая вперед, стоит иметь в виду, что при естественной ширине, отсутствии каких-либо запретов и в центре линии это сечение чудовищно велико — порядка квадрата длины волны λ^2 , т. е. в $\sim (c/v)^2$ раз больше «площади» иона (v — орбитальная скорость связанных электронов). Правда, при уширении и той или иной «запрещенности» сечения уменьшаются, но все равно с точки зрения атомных размеров они как правило имеют громадные величины, что, впрочем, отчасти «компенсируется» тем, что такое поглощение существует лишь в узких спектральных интервалах вокруг отдельных резонансных частот.

Связанно-свободные переходы или фотоэффект, очевидно, тоже описываются сечением, но оно уже на два порядка (точнее, в $\sim \hbar c/e^2$ раз) меньше ионной «площади», зато в процесс вовлечен широкий спектр.

Свободно-свободные же переходы происходят за счет ускорения, сопровождающего пролет плазменных электронов мимо таких же ионов, и потому дают зависимость $1/l_\omega \propto nn_z$. Здесь использовать понятие сечения для характеристики взаимодействия кванта с плазмой не стоит (формально введенное для поглощающих электронов оно оказывается зависящим от n_z). Ежели же ради экзотики и единообразия оценок учесть, что «по Сах^а» $nn_z \propto n_{z-1}$, и ввести «сечение» для не участвующих в процессе ионов $z - 1$, то оно окажется еще меньшим, чем у фотоэффекта.

Всю эту пока абсолютно голословную и предварительную информацию предстоит обосновать и конкретизировать в последующем уже подробном и ответственном анализе реакции (2.3) с позиций электронов. Нынешний анализ — это еще и подготовка вопросов для будущего. Разные «катализаторы» в перечисленных вариантах приводят к разным последствиям. Как и подчеркивалось ранее, необходимо уметь описывать эти катализаторы тоже (т. е. какие ионы участвуют, в каком состоянии и т. п.). Бывает также, что в поглощении оказываются задействованными колебательные молекулярные переходы или вообще циклотронный механизм.

Рассеяние. Из упомянутых в параграфе «поглощение» процессов перехода для рассеяния существенны лишь резонансные, обеспечи-

вающие сечение в максимуме все того же порядка $\sim \lambda^2$. Однако здесь возможно и как правило доминирует нечто совершенно новое, а именно «бескаталитичное» томсоновское рассеяние на свободных электронах с сечением $\sim r_0^2$, где $r_0 = e^2/(mc^2) \approx 2,8$ фм — классический радиус электрона. Стандартно считается, что этот процесс идет без изменения частоты фотона. В то же время известно, что при практически не рассматриваемых далее релятивистских энергиях ($\hbar k > mc$) отдача электрона при восприятии им импульса кванта вызывает вариации ω , причем в обе стороны (прямой и обратный — при встречном движении частиц — эффект Комптона). На самом деле это происходит и в классике из-за эффекта Доплера (который, собственно, представляет собой тот же самый баланс энергии–импульса, см. задачу 1): даже при $\hbar\omega \ll mc^2$ одинаковые частоты в сопутствующей системе координат могут весьма заметно различаться в лабораторной (ведь в (2.3) при этом $\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}$). Происходящий в результате обмен энергиями между электронным и фотонным компонентами важен, например, в космосе (именно рассеяние галактических электронов и межгалактических протонов космических лучей — это, правда, с рождением пионов — на реликтовом излучении определяет их пробеги) и в современных ускорителях (а тут обратный Комптон специально используют для наращивания жесткости γ -частиц). Тем не менее, в данном курсе он почти не рассматривается — поглощение в исследуемых вариантах будет сильнее (все-таки r_0 достаточно мал), и в последующих выкладках, и, соответственно, в самом базовом уравнении рассеяние не учитывается.

2. Если бы кванты только выбывали из игры, откуда бы они вообще брались? Естественно, кроме убыли есть и их прибыль. Так называемая спонтанная добавка характеризуется вторым «внешним» фактором: коэффициентом излучения j_ω . В игре с выходом фотона участвуют те же самые электроны, что и в вариациях с его гибелью, фактически речь идет о прямых и обратных процессах, т. е. наличествует *прямая*, хотя и различная в разных ситуациях связь этого процесса с поглощением. Важнейшим дополнительным эффектом является инициируемое уже присутствующими квантами вынужденное излучение (именно оно приводит к отличиям планковской и больцмановской статистик γ - и e - (или β -?) частиц соответственно, см. задачу 2). Таким образом, прибыль на бесконечно малом пути есть

$$dI_\omega^+ = j_\omega(1 + n_\omega) ds \equiv j_\omega(1 + \alpha_\omega I_\omega) ds.$$

Возникший здесь коэффициент α_ω , связывающий число заполнения со спектральной интенсивностью, в отличие от параметров

l_ω и j_ω является характеристикой не среды, а фазового объема фотонов, и, стало быть, не специфичен, а универсален (ср. вывод (2.1)):

$$n_\omega \frac{k^2 dk d^2\mathbf{n}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2} \frac{I_\omega}{\hbar\omega c} d\omega d^2\mathbf{n} \xrightarrow{k=\omega/c} \alpha_\omega = \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3}$$

(порождают себе подобных лишь кванты с одинаковой поляризацией). Ясно также, что он простым множителем входит в распределение Планка, так что (2.1) можно переписать в виде

$$I_{\omega b} = \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}.$$

Нетрудно заметить существенное упрощение «доходного» уравнения, связанное с пренебрежением рассеянием. При его наличии следует учитывать приход квантов из других \mathbf{n} и ω , причем поскольку в одном акте рассеяния изменения частоты и направления движения бывают отнюдь не малыми, соответствующие члены в уравнении оказываются интегральными по углам и энергиям, что сильно затрудняет аналитическое и численное оперирование. Это еще одна причина нерассмотрения подобных эффектов в данной книге.

3. Разобранные выше процессы поглощения–излучения происходят не оторванно друг от друга. Они коллегиально вносят свой вклад в еще одни — кинематические — изменения спектральной интенсивности

$$dI_\omega^\pm = \frac{\partial I_\omega}{\partial t} \frac{ds}{c} + \frac{\partial I_\omega}{\partial s} ds,$$

связанные просто с движением квантов в нестационарной и неоднородной среде. Если теперь для сведения дебета с кредитом собрать воедино все вариации I_ω , то итоговый баланс трех приращений (а именно $dI_\omega^\pm = dI_\omega^- + dI_\omega^+$) и даст искомое транспортное уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\omega}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{n}\nabla}_{\partial/\partial s} I_\omega = j_\omega(1 + \alpha_\omega I_\omega) - \frac{I_\omega}{l_\omega}. \quad (2.4)$$

В нем использована инвариантная запись для пространственной производной.

Уравнение (2.4) выглядит весьма компактно, но оказывается, что это несложное соотношение можно дополнительно упростить. Во-первых, удобно «отнормировать» баланс на черное излучение. Действительно, в термодинамически равновесной (и, стало быть, однородной в пространстве и времени) плазме, стремящейся породить

кванты с планковским распределением, правая часть обязана обращаться в нуль при $I_\omega = I_{\omega b}$, следовательно, здесь

$$j_\omega l_\omega = \frac{I_{\omega b}}{1 + \alpha_\omega I_{\omega b}} = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)}{\alpha_\omega} \quad (2.5)$$

(так называемый закон Кирхгофа), т. е. коэффициент излучения и длина пробега квантов в равновесной среде оказываются жестко связанными между собой универсальным образом. Иными словами, динамика излучения в таких средах на самом деле определяется только одним «внешним» фактором. Нетрудно понять, что больцмановская экспонента в связи излучения с поглощением возникает из соотношения равновесных заселенностей электронами энергетических уровней: вероятность излучения пропорциональна числу электронов в верхнем, а вероятность поглощения — нижнем состояниях, причем разность энергий этих состояний по закону сохранения равна $\hbar\omega$.

Во-вторых, после столь удачной группировки членов в правой части (2.4) по физике дела, значительно сократившей потребное теории число характеристик среды, к проблеме можно подойти и с математической точки зрения. В том же месте присутствуют два члена, пропорциональных спектральной интенсивности. Их формальное объединение вводит в обиход новую характеристику плазмы $1/l'_\omega = 1/l_\omega - j_\omega \alpha_\omega$, громоздко называемую длиной пробега излучения, подправленной на процессы индуцированного испускания. Согласно сказанному выше, в равновесном варианте она равна

$$\frac{1}{l'_\omega} = \frac{1}{l_\omega} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right].$$

Ее асимптотики

$$l'_\omega \sim \begin{cases} l_\omega \frac{T}{\hbar\omega}, & \hbar\omega \ll T \\ l_\omega, & \hbar\omega \gg T \end{cases}$$

свидетельствуют о резком уменьшении эффективного поглощения квантов за счет механизма индуцированности в рэлей-джинсовской области спектра и, наоборот, крайне незначительном его влиянии на эволюцию излучения в области виновской. В то же время, поскольку это новое понятие основано на универсальных математических свойствах (2.4), то оно вполне применимо и к неравновесным средам: например, в лазерах за счет инверсной заселенности электронами верхних энергетических уровней (см. комментарий к (2.5)) оказывается, что $l'_\omega < 0$. Это правильно отражает тот банальный факт, что баланс рождения/поглощения фотонов в генерирующей среде

в отличие от среды термодинамической дает экспоненциальный рост излучения. Опять-таки стоит заметить, что у такого объединения есть и физика: раздельное описание поглощения и индуцированного испускания может быть проведено лишь на микроскопическом уровне, в макроскопических измерениях поглощения света эти два эффекта не разделяются (см. лекцию 6).

Окончательно с использованием новой характеристики из (2.5) следует, что можно положить $j_\omega = I_{\omega b}/l'_\omega$ — эффекты, связанные с нередко возникающей на практике неравновесностью горячей плазмы как термостата обсуждаются в последних двух лекциях, а пока все внимание будет уделено этому простейшему варианту, вполне адекватному широкому кругу реальных ситуаций. Для собственных характерных мод дело обстоит по иному — как правило в турбулентной плазме в стационаре, например, $U_b^l/(nT) \gg 1/N_D$ (и даже возможен вариант с $U_b^l > nT$). Что ж, с правой частью базового уравнения разобрались. Левая также «избыточна» в описании изучаемых далее явлений. Действительно, если рассмотреть процесс установления локального равновесия излучения с веществом, то нетрудно увидеть, что в однородном варианте $\nabla I_\omega \equiv 0$

$$I_\omega - I_{\omega b} \propto \exp\left(-\frac{ct}{l'_\omega}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

т. е. необходимое соответствие плазменных компонентов возникает на ничтожных (с точки зрения других «термостатных» процессов эволюции, например, изменений концентраций и температур электронов с ионами) для большинства подвергаемых теоретическому анализу плазм временах $\tau \sim l'_\omega/c$. Это позволяет опустить в (2.4) временную производную. Естественно, такую редукцию можно проводить не всегда, например, в модной области по исследованию так называемой лазерной короны фемто-, а то и аттосекундных лазеров она просто недопустима, но здесь эта экзотика не обсуждается.

Итак, необходимое для получения желаемого представления о проблематике транспорта лучистой энергии основное уравнение переноса фотонов в базовом для этой части варианте представимо в виде

$$\mathbf{n}\nabla I_\omega = \frac{I_{\omega b} - I_\omega}{l'_\omega}. \quad (2.6)$$

Оно описывает простой и наглядный баланс вдоль луча \mathbf{n} (d/ds в левой части) вступающих в игру и выбывающих из нее квантов (правая часть). В изотропной среде, когда l'_ω не зависит от направления \mathbf{n} , оно допускает непосредственное прямое интегрирование по телесному углу (как будет видно из следующей лекции, это необходимый этап

в решении практических энергетических задач). Воспользовавшись тем, что

$$\int_{4\pi\circ} \mathbf{n} \nabla I_\omega d^2\mathbf{n} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{4\pi\circ} n_i I_\omega d^2\mathbf{n}$$

(в тензорной записи $\mathbf{n} \nabla \rightarrow n_i \partial / \partial x_i$), а также связью между различными кинетическими характеристиками фотонного компонента, указанными в первой лекции, результат этого интегрирования, представляющий собой нулевой момент базового (2.6), можно записать как

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_{E\omega} = \frac{c}{l'_\omega} (U_{\omega b} - U_\omega). \quad (2.7)$$

Инструмент получен и готов к использованию. Оказывается, что все, что нам нужно знать для конкретной работы с ним о равновесной плазме — это фактор l'_ω .

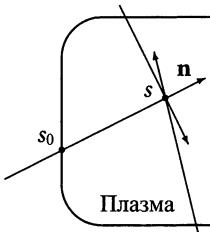
Прежде, чем приступать к оперированию, полезно дать отчет, что возникает «на выходе» предстоящих действий, к чему надо стремиться? Поскольку согласно заявленной программе нас интересуют энергетические, а не диагностические проблемы, то как новый агент сказывается в знакомых из первой части общих законах сохранения? Ответ на эти вопросы довольно прост. Вычисленный спектральный поток после интегрирования еще и по частотам (т. е. как бы перехода к «гидродинамике» излучения) следует аддитивно (например, наряду с обычной теплопроводностью и нагревом из-за вязкости) добавлять в теплоперенос

$$nT \frac{dS}{dt} = \dots - \operatorname{div} \mathbf{S}_E \quad (2.8)$$

(надо помнить, что согласно выбранному приближению вклад излучения в левую часть гидродинамических уравнений в рассматриваемых здесь и ниже вариантах мал). При этом автоматически аналогичный член появляется и в правой части энергетического уравнения (1.5) (см. комментарий к нему), но обычно «работают» именно с (2.8) — как более компактным, см. последующие лекции. В плазме, строго говоря, левая часть (2.8) должна представлять собой сумму вкладов в теплосодержание среды в целом электронов и ионов, но часто при раздельном двухжидкостном описании излучение учитывают только в электронном «блоке» уравнений. Причина такого выбора заключается в том, что как правило на его генерацию «затрачивается» энергия именно электронного компонента плазмы. Для рождения фотонов при свободно-свободных и свободно-связанных переходах это очевидно (хотя и здесь следует иметь в виду, что в этих процессах наряду с тепловой крайне существенна бывает и энергия ионизации, см.

лекцию 5), но и при излучении в дискретном спектре (даже если речь не идет о циклотронном механизме) на верхние энергетические уровни связанные электроны «забрасываются» в основном своими свободными компаньонами, см. лекцию 9.

Так ли уж просты для выполнения этой программы выведенные уравнения (2.6) и (2.7)? Насколько физически оправданным выглядит их усреднение «в лоб» по частотам (недаром же в первой лекции подчеркивалась плохая «гидродинамичность» излучения)? Если процедуры последовательного суммирования (интегрирования) вклада всех присутствующих в системе квантов начинать с определения их локальных (по \mathbf{n} , \mathbf{r} и ω) характеристик, то «операбельным» пока что является лишь первое из этих уравнений: поскольку во второе входят две неизвестные функции ($S_{E\omega}$ и U_ω), решать его само по себе невозможно. Усложняющим жизнь обстоятельством в вычислении I_ω (первого звена в процессе выполнения намеченной программы) является то, что полагаемая известной при работе с (2.6) характеристика $I'_\omega = I'_\omega(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$, да и $I_{\omega b}$ в нем общем случае неоднородно прогретой среды отнюдь не константа. Тем не менее, это линейное неоднородное обыкновенное (напомним, что теперь, без $\partial/\partial t$, $\mathbf{n}\nabla = d/ds$) дифференциальное уравнение первого порядка весьма банально решается методом вариации постоянной. Выбирая произвольным образом направление пронизывающего плазму луча \mathbf{n} , ответ можно записать в представленном на рис. 2.3 виде. Физика этой формулы элементарна — в ней идет суммирование вдоль луча рождающихся в плазме и пришедших из вакуума квантов с учетом их выбытия из-за поглощения по дороге до точки наблюдения s .



$$I_\omega = \int_{s_0}^s \frac{I_{\omega b}}{I'_\omega} \exp\left(-\int_{s'}^s \frac{ds''}{I'_\omega}\right) ds' + I_{\omega 0} \exp\left(-\int_{s_0}^s \frac{ds''}{I'_\omega}\right).$$

Рис. 2.3. К решению базового уравнения

Сделав аналогичные выкладки для всех проходящих через данную точку \mathbf{r} лучей (направления, отличающиеся на 180° , следует считать разными), можно применять сначала $\int d^2\mathbf{n}$ (снова см. рис. 2.3), а затем и $\int d\omega$ (или наоборот). Задача выглядит решенной. На самом деле, однако, окончательная формула, которая здесь даже не выписывается, оказывается столь «обвешенной» интегралами, что может рассмат-

риваться скорее в качестве некоего символа (что, впрочем, сердцу теоретика все равно бывает приятным), нежели реального инструмента описания. Истинная метода действий, разбираемая в следующей лекции, несколько отличается от идеалистической формальной процедуры.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить эффект Доплера при излучении кванта за счет изменения внутренней энергии частицы-излучателя на $\Delta\mathcal{E}$ как следствие закона сохранения энергии-импульса.

Решение. Соответствующий баланс в лабораторной системе отсчета имеет вид

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{E} + \frac{M_{\text{изл}} v^2}{2} = \hbar\omega + \frac{M_{\text{изл}} v'^2}{2} \\ M_{\text{изл}} \mathbf{v} = \hbar\mathbf{k} + M_{\text{изл}} \mathbf{v}' \end{cases} \rightarrow \omega \approx \frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar} + (\mathbf{k}, \mathbf{v})$$

при условии, что $\hbar\omega \gg (\hbar k)^2 / M_{\text{изл}}$ или $M_{\text{изл}} c \gg \hbar k$ (при $\omega = kc$). Любопытно сопоставление с эффектом Вавилова-Черенкова, связанного с возможностью рождения излучения без затрат внутренней энергии $\Delta\mathcal{E} = 0$, и с так называемым аномальным эффектом Доплера, при котором внутренняя энергия излучателя в процессе генерации фотонов увеличивается — естественно, все это имеет место при больших v и не в вакууме. Полезно провести аналогичные выкладки и для рассеяния света на свободном электроны. В этом случае баланс дает следующее выражение для частоты рассеянной волны

$$\omega' = \omega + ([\mathbf{k}' - \mathbf{k}], \mathbf{v}) - \frac{\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{2m}.$$

С ригористской точки зрения только последний, квантовый член в правой части соответствует эффекту Комптона, однако и доплеровский второй вполне обеспечивает обмен энергиями между частицами. На самом деле разница между ними весьма относительна.

2. Довольно часто закон Кирхгофа (2.5) трактуют в обратном использованному здесь смысле. А именно, зависимость $j_\omega I_\omega \propto \exp(-\hbar\omega/T)$ считают термодинамически первичной, используя ее для нахождения энергетического распределения квантов $I_{\omega b}$, порождаемого балансом поглощения со спонтанным и индуцированным излучением. Следует убедиться в том, что эта процедура приводит к распределению Планка, и проанализировать вопрос о его модификации в отсутствие характерного для бозонов эффекта индуцирования.
3. С помощью первого начала (2.2) и уравнения непрерывности (1.2) переписать левую часть уравнения теплопереноса (2.8) в терминах температуры и концентрации для идеального газа с показателем адиабаты γ (не путать с квантом!).

Решение. Поскольку

$$nT \frac{dS}{dt} = n \frac{dE}{dt} + nP \frac{d1/n}{dt},$$

то, очевидно, уравнение (2.8) с учетом указанных обстоятельств может быть переписано как

$$c_V n \frac{dT}{dt} + P \operatorname{div} \mathbf{v} = \dots - \operatorname{div} \mathbf{S}_E \quad \left(c_V = \frac{1}{\gamma - 1} \right).$$

ЛЕКЦИЯ 3

Излучение однородного плоского слоя. Проблемы спектра: излучение в узком диапазоне, неоднородная нагретость. Усредненное описание объемного излучения. Диффузия в оптически толстой среде.

Итак, как на самом деле рассчитывается совокупный (по \mathbf{n} и ω , а в конечном счете и по \mathbf{r}) эффект? Какие физические обстоятельства следует принимать во внимание при переходе от локального по углу и частоте описания в рамках (2.6) к глобальному? Для прояснения проблем начнем с изучения излучения от простейшей в геометрическом отношении однородной среды конечных размеров, неподсвечиваемой извне — плоского слоя толщины a (рис. 2.4). Прямое

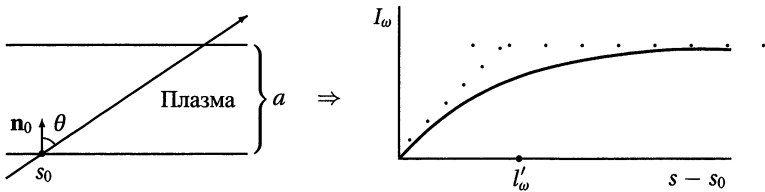


Рис. 2.4. Излучение плоского слоя

интегрирование базового уравнения вдоль выбранного луча (покуда он остается внутри плазмы) дает в этом случае (ср. рис. 2.3)

$$I_{\omega} = I_{\omega b} \left[1 - \exp\left(-\frac{s - s_0}{l'_{\omega}}\right) \right] \quad (2.9)$$

(рис. 2.4 справа), что всегда меньше, чем $I_{\omega b}$ — но следует понимать, что это неравенство имеет место только вследствие однородности нагрева $I_{\omega b}(\mathbf{r}) = \text{const}$ (см. ниже). Такой ход изменения спектральной интенсивности вглубь плазменного объекта означает, что ее равновесные значения устанавливаются на масштабах $\sim l'_{\omega}$. Можно выделить две асимптотики I_{ω} в среде у границы

$$I_{\omega} \approx \begin{cases} I_{\omega b} \frac{s - s_0}{l'_{\omega}} \ll I_{\omega b}, & s - s_0 \ll l'_{\omega} \\ I_{\omega b}, & s - s_0 \gg l'_{\omega} \end{cases}$$

Для качественного анализа возможных ситуаций вполне допустима их грубая шивка за счет замены $\approx \rightarrow \equiv$ и продления первой до предела второй ($\ll \rightarrow <$, $\gg \rightarrow >$). Полученный в результате такой операции «спрямленный» пунктирный график на рис. 2.4 обеспечивает

в оценках интенсивности значения $O(1)$ от ее истинных величин. Он характеризуется словами о нарастании I_ω пропорционально $s - s_0$ до достижения равновесного значения $I_{\omega b}$ и полной остановки роста после этого.

На выходе из плазмы (2.9) на том же луче дает

$$I_\omega = I_{\omega b} [1 - \exp(-a_{\text{опт}})] \quad \left(a_{\text{опт}} = \frac{a}{l'_\omega \cos \theta} \right),$$

где использовано важное понятие *оптической толщины* слоя, тривиально обобщаемое на тела любой формы. К сожалению, это не универсальная характеристика среды, она сильно различается для разных лучей (в данном случае — углов θ). Вариации бывают велики, а здесь особенно, поскольку рассматривается неодномасштабное тело (формально по двум направлениям плазма бесконечна).

Из-за специфики геометрии данного плазменного объекта для вычисления его интегральных потерь удобно просуммировать вклад всех участков среды до интегрирования по углам. На самом деле эта операция сводится к интегрированию выражения для $I_\omega(a)$ по площади ($\int d^2\mathbf{r}$), поскольку по одной координате вклад уже просуммирован. В двух предельных случаях так называемых оптически тонких ($a_{\text{опт}} \ll 1$, $I_\omega \propto a_{\text{опт}}$) и оптически толстых ($a_{\text{опт}} \gg 1$, $I_\omega \approx I_{\omega b}$) сред поток квантов, летящих в данном направлении, зависит от полного объема $V = aF$ и только поверхности F (буде она конечна) слоя соответственно. Эти четко разделяемые режимы излучения носят естественные названия объемных и поверхностных потерь. «Нарастание» толщины плазмы в первом варианте увеличивает наблюдаемое излучение прямо пропорционально значению a и абсолютно никак не сказывается во втором.

Очень характерно в этих режимах и поведение легко измеряемой *испускающей способности* объекта: излучения с единицы поверхности под данным углом — не обязательно по нормали — $i_\omega = I_\omega \cos \theta$ (эффективная площадь поверхности, среды, дающая вклад в такой поток $\propto \cos \theta$):

$$i_\omega(\theta) \propto \begin{cases} \text{const} \\ \cos \theta \end{cases} \quad \text{const} \ll 1.$$

Поскольку для любого $a \rightarrow 0$ существуют углы, на которых $a_{\text{опт}} \rightarrow \infty$, то первый режим обязательно переходит во второй при «скользящих» направлениях $\theta \rightarrow \pi/2$.

Если вернуться к суммированию $I_\omega(a)$ по телесному углу (которое на практике приходится осуществлять и для объектов других форм),

то вычисление излучаемого слоем наружу одностороннего потока приводит к

$$S_{E\omega} = \int_{2\pi\ominus} \cos\theta I_{\omega} d^2\mathbf{n} \equiv \int_{2\pi\ominus} i_{\omega} d^2\mathbf{n} = S_{E\omega b} \left[1 - 2E_3\left(\frac{a}{l'_{\omega}}\right) \right]$$

(с заменой $a \rightarrow x$: $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_x$ — внутри слоя). Здесь в формулах появляются уже спецфункции: интегральные экспоненты

$$\int_0^1 \exp\left(-\frac{\xi}{\cos\theta}\right) \cos\theta d(\cos\theta) \stackrel{\cos\theta \rightarrow 1/\eta}{=} \int_1^{\infty} \exp(-\xi\eta) \frac{d\eta}{\eta^3} = E_3(\xi)$$

(происхождение индекса «3» у символа спецфункции очевидно). Предельные режимы (случаи больших и малых a/l'_{ω}), впрочем, можно изучать, пользуясь непосредственно асимптотиками I_{ω} .

Для оптически толстой ($a \gg l'_{\omega}$) среды интегрирование $I_{\omega} \approx I_{\omega b}$, очевидно, дает $S_{E\omega b}$. Дальнейшее суммирование по ω проводится не менее легко, и интегральный поток $S_E \approx \sigma_{\text{СВ}} T^4$. Для тонкой же в пренебрежении малым вкладом от $\theta \rightarrow \pi/2$

$$S_{E\omega} \approx 2\pi \int_0^1 I_{\omega b} \frac{a}{l'_{\omega}} d(\cos\theta) = 2S_{E\omega b} \frac{a}{l'_{\omega}} \ll S_{E\omega b}$$

(«лишняя» двойка возникает из-за сокращения $\cos\theta$ под интегралом), что позволяет говорить о поверхностном и объемном режимах высвечивания и в целом. Строгое использование асимптотик E_3 , естественно, приводит к тому же.

На самом деле, если среда характеризуется несколькими существенно различными пространственными масштабами (а таковы, например, токамак, z-пинч или лайнер), то $a_{\text{опт}}$ как функция \mathbf{n} варьируется в широких пределах, и переход от режима « \ll » к режиму « \approx » для $S_{E\omega}$ здесь бывает витиеватее, чем в случае I_{ω} : ответ может быть чувствителен к геометрии объекта (плазмы). Иными словами, вообще говоря, уже первое (по углу) суммирование (2.9) не вполне тривиально. Далее, l'_{ω} тоже может сильно варьироваться, так что второе интегрирование — по частоте — еще более непросто: от ω зависят две разные функции (универсальный равновесный поток и специфическая для данной среды длина пробега).

Действительно, качественно, с точностью до E_n вместо \exp , $S_{E\omega}$ ведет себя все же подобно I_{ω} : грубо говоря, растет, пока может, пропорционально a/l'_{ω} и останавливается локально при данной частоте, упираясь в чернотельный спектр $S_{E\omega b}$. А вот для глобальной по ω равновесности такое «упирание» должно произойти вдоль большей

части планковского распределения. В качестве примера стоит разобрать переход объемного режима в поверхностный для излучения с исходно узкой спектральной характеристикой $1/l'_\omega$ типа отдельной линии (рис. 2.5). Нетрудно видеть, что закон $S_E \propto a$ перестает выполняться очень рано, однако до установления $S_E \approx \sigma_{SB} T^4$ приходится

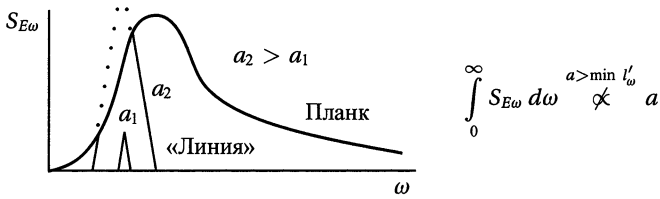


Рис. 2.5. Специфика суммирования по частотам $S_{E\omega}$

ждать, пока первоначально чрезвычайно хилые «крылья» линии не заполняют собой почти всю площадь под кривой Планка. Смена скейлинга для $S_E(a)$ здесь чрезвычайно «затянута», границы их реализации $a \ll a_{\min}$ и $a \gg a_{\max}$ (ср. с единственным параметром $l'_\omega \cos \theta$ для (2.9)) очень сильно различаются между собой: $a_{\min} \ll a_{\max}$. В таких обстоятельствах «спрямление» графика суммарного одностороннего потока в духе рис. 2.4 может приводить к ошибке уже на порядки величины.

Еще более усложняет жизнь до сих пор пренебрегаемая, но абсолютно рядовая на практике неоднородность нагрева плазмы. Как следует из всего предыдущего, к внешнему наблюдателю доходит излучение с глубины $\sim l'_\omega(T)$, и если температура растет внутрь среды, то хорошо поглощаемые кванты, достигающие детектора, рождаются в более холодных областях, тогда как длиннопробежные, наоборот, относительно «горячи». В результате фиксируемый спектр остается не планковским даже для предельно толстого полубесконечного светящегося объекта (рис. 2.6). Стандартно он идет несколько ниже некоего

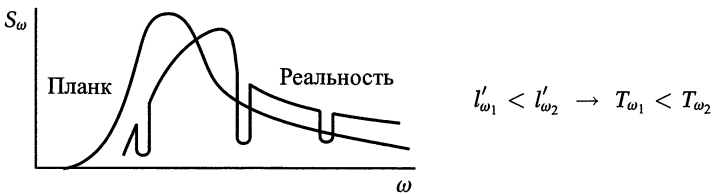


Рис. 2.6. Спектр неоднородно нагретого излучателя

«среднего» планковского (вычисляемого, например, по эффективной температуре $S_E = \sigma_{SB} T_{\text{eff}}^4$) в мягкой и несколько выше его в жест-

кой спектральной области (энергичные кванты в среднем пробегают дальше) и демонстрирует резкие «провалы», отвечающие хорошо поглощаемым резонансным линиям. В неоднородной плазме вполне возможны ситуации и с $I_\omega \gg I_{\omega b}$ (собственно, этот вариант виден уже и на примере со слоем: снаружи его формально $I_{\omega b} \equiv 0$ — почему, кстати?).

Тем не менее, и при наличии всех этих проблем можно все-таки выделить два предельных по оптической толщине характерных качественных случая излучающей плазмы. Любопытно, что в этих крайних вариантах удобным оказывается суммировать по углу не решение, а само исходное уравнение (2.6).

Объемный излучатель. Характеризуется набором неравенств

$$a \ll l'_\omega \rightarrow I_\omega, U_\omega \ll I_{\omega b}, U_{\omega b}.$$

Отличительной чертой является малоплотная упаковка квантов (см. конец первой лекции). Для описания особенно хорош нулевой момент базового уравнения (2.7) — теперь-то в силу возможности пренебречь U_ω в нем наличествует лишь одна неизвестная величина. Остается лишь проинтегрировать это выражение по ω и получить искомую интенсивность излучения из единицы объема

$$q_\omega = \operatorname{div} \mathbf{S}_{E\omega} = \frac{cU_{\omega b}}{l'_\omega} \xrightarrow{\int d\omega} q = \operatorname{div} \mathbf{S}_E = \frac{cU_b}{l'} = \frac{4\sigma_{\text{SB}} T^4}{l'}. \quad (2.10)$$

Здесь введен новый важнейший параметр (равновесной) плазмы, описывающий ее интегральные потери, $l' = \langle l'^{-1} \rangle^{-1}$ — *длина пробега относительно запираания*. Этимология связана с тем, что при $a \sim l'$ объемный характер излучения теряется, поскольку

$$\frac{cU_b}{l'} \sim \frac{S}{a} \sim \frac{cU}{a} \not\approx \frac{cU_b}{a}$$

в том смысле, что достижение $U \sim U_b$ нарушает исходную модель. Кванты перестают свободно выходить из среды и, стало быть, «запираются» в ней. Что же касается также нового понятия q_ω , то эта величина однозначно связана с коэффициентом излучения

$$q_\omega \equiv \int_{4\pi\bigcirc} j_\omega d^2\mathbf{n}.$$

Усреднение обратного спектрального пробега $\langle * \rangle$ идет по планковскому распределению. Результат особенно прост, когда усредняемое выражение «одномасштабно» с весовой функцией: тогда $l' \sim l'_{T/\hbar}$. Однако реальная зависимость $1/l'_\omega$ от частоты далеко не всегда иден-

тична $U_{\omega b}$. Даже для свободно-свободных переходов электронов, когда эта функция особенно плавна (монотонно спадает) и «температурна» (см. лекцию 6), численный коэффициент в этом скейлинге далеко не 1. Поглощение за счет фотоэффекта приводит уже к «пилообразному» спектру обратных длин (см. лекцию 7), связанному со скачкообразным возрастанием сечения поглощения, как только энергии квантов становится достаточно для ионизации электронов из новой оболочки, сменяющимся плавным спадом при дальнейшем повышении жесткости. И, наконец, вероятность поглощения в линиях имеет характер отдельных узких «выбросов» (см. лекцию 8).

При «хорошем» усреднении можно пользоваться самыми разными параметризациями эффектов, например, вводить так называемую «температуру излучения» из соотношения

$$Q \sim \sigma_{\text{SB}} T^4 \frac{a}{l'} = \sigma_{\text{SB}} T_{\text{rad}}^4 \rightarrow T_{\text{rad}} = T \left(\frac{a}{l'} \right)^{1/4} \ll T$$

(очевидно, что при этом T_{rad} является мерой исключительно интегральных потерь, но отнюдь не их жесткости!). В противных случаях требуется несколько бóльшая предусмотрительность.

Тем не менее, процесс потерь выглядит достаточно простым: каждый излучающий элемент среды ничего не знает о соседях, происходящее совершенно аддитивно, последнее суммирование по \mathbf{r} тривиально. Никакого транспорта фактически нет, все рожденные в плазме кванты как бы «телепортируются» из нее. Наблюдаемые спектры согласно (2.10) принципиально зависят от индивидуальных свойств излучателя — его специфической характеристики l'_ω (или j_ω).

Поверхностный излучатель. Характеризуется формулами

$$a \gg l'_\omega \rightarrow I_\omega, U_\omega \approx I_{\omega b}, U_{\omega b}.$$

Кванты упакованы максимально плотно и локально почти равновесны. Излучение хорошо «заперто» внутри среды, до внешнего наблюдателя доходят лишь фотоны, рожденные вблизи границы с вакуумом. Что однако происходит в объеме? Как перераспределяется тепловая энергия плазмы, теряемая с поверхности?

Очевидно, что вследствие «равновесной» изотропии спектральный поток $\mathbf{S}_{E\omega} \rightarrow 0$. Однако неоднородность прогрева в лице $U_{\omega b}(T(\mathbf{r}))$, ощущаемая на расстояниях $\sim l'_\omega$, нарушает баланс (см. лекцию 1), и поток, несмотря на свою малость, все же отличен от нуля. Для его определения следует сначала домножить (2.6) на \mathbf{n} и лишь затем проинтегрировать по $d^2\mathbf{n}$, т. е. «в работу» включается уже первый момент базового уравнения. В левой части, воспользовавшись хорошей

изотропией излучения, можно вынести I_ω из-под интеграла и записать (снова с помощью тензорного представления)

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial x_j} \int_{4\pi\bigcirc} n_i n_j d^2 \mathbf{n} = 4\pi \nabla_j I_\omega \frac{\delta_{ij}}{3} = \frac{c}{3} \nabla U_\omega$$

(поскольку $\langle n_i n_j \rangle_{4\pi\bigcirc} = \delta_{ij}/3$). В правой же истинно симметричная $I_{\omega b}$ даст тождественный нуль, в то время как малый разбаланс в I_ω по определению приведет как раз к $\mathbf{S}_{E\omega}$. Окончательно, используя $U_\omega \approx U_{\omega b}$ (малая неоднородность уже учтена!),

$$\frac{c}{3} \nabla U_{\omega b} = -\frac{S_\omega}{l'_\omega}. \quad (2.11)$$

Эта замечательная формула, указывающая на диффузионный характер переноса энергии, описывает так называемое приближение *лучистой теплопроводности*. Излучение последовательно «перетекает» от одних слоев плазмы к другим, «продираясь» сквозь среду. Такой транспорт далеко не тривиален.

Обязательное для глобального описания энергопотерь суммирование потока по частотам (с уже разобранными выше неизбежными проблемами различных зависимостей l'_ω и $U_{\omega b}$) дает окончательно

$$\mathbf{S}_E = -\frac{lc}{3} \nabla U_b = -\frac{16\sigma_{SB} l T^3}{3} \nabla T \quad (2.12)$$

с опять-таки новой характеристикой среды $l = \langle l'_\omega \rangle$ — *росселандовым пробегом*. Он также определяет границы режима: при $|\nabla^{-1}| \equiv L \sim l$ диффузионность транспорта теряется:

$$S_E \sim c U_b \frac{l}{L} \not\approx c U_b,$$

поскольку максимум, на что способны кванты — это лететь всем скопом в одну сторону.

Важно, что и усредняемая величина (просто спектральный пробег), и весовая так называемая *росселандова функция* (производная от планковской по T , так как $\nabla U_{\omega b} \equiv dU_{\omega b}/dT \cdot \nabla T$) — ее максимум находится при $\hbar\omega \sim 4T$, что повышает вклад в процесс (2.12) над-тепловых квантов — здесь другие, нежели при вычислении пробега относительно запираения, поэтому $l \neq l'$, и «зазор» между режимами « $\ll l'$ » и « $\gg l$ » может быть очень велик (особенно для линий, ср. сентенции по поводу поведения $S_E(a)$).

Очевидно, полученное на выходе всех суммирований уравнение (2.12) сложнее базового, поскольку содержит частные производные и нелинейно, но на самом деле оказывается гораздо «оперативнее»

того: все интегралы уже взяты (кроме как по \mathbf{r} — сие еще предстоит в следующей лекции), надо действовать! Осталось лишь для физической и математической полноты задачи выписать к (2.12) условия на границе плазма–вакуум. Парадоксальным образом, несмотря на исходно продекларированный поверхностный режим высвечивания, «очевидная» формула $\mathbf{S}_E|_{\Gamma} = \sigma_{\text{SB}} T^4(\Gamma) \mathbf{n}_0$ не слишком-то хороша. Дело в том, что, поскольку излучательную потерю тепла плазмой обеспечивает подтекающий к границе поток

$$\underbrace{\sigma_{\text{SB}} T^4}_{\text{с поверхности}} \sim \underbrace{\sigma_{\text{SB}} T^4 \frac{l}{L}}_{\text{внутри}},$$

то градиент температуры вблизи нее в обязательном порядке не мал: $l \sim L$. Это означает, что существенный вклад в выходящее излучение вносят слои с температурой, заметно большей поверхностной.

Несколько искусственно можно положить, что «равновесная» изотропизация интенсивности по углу вблизи границы (на расстояниях, меньших l) наличествует только в одной полусфере (ведь из вакуума в плазму ничего не поступает), скажем,

$$I_{\omega}(\mathbf{n}) = \begin{cases} \text{const}, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}.$$

Тогда при учете связи между кинетическими характеристиками и интегральной равновесности ($U \equiv U_b$)

$$\mathbf{S}_E|_{\Gamma} = \frac{cU_b}{2} \mathbf{n}_0 = 2\sigma_{\text{SB}} T^4(\Gamma) \mathbf{n}_0$$

(лишняя двойка возникает из-за того, что в односторонний поток теперь дают вклад все кванты, а не их половина). Несмотря на внутреннюю противоречивость (одновременное использование $U = U_b$ и сильной зависимости $I(\theta)$), это приближение лучше, чем кажется: все-таки $2 > 1$. Тем не менее, в подобных задачах желательно все же пользоваться более универсальными моделями, явно учитывающими возможность $l > L$ (см. следующую лекцию).

Использование выведенных уравнений предстоит в задачах и следующей лекции, завершить же данную стоит разбором физических причин диффузионного характера теплопереноса, описываемого (2.12). Удобно сопоставить лучистую и электронную (кстати, обе нелинейные по T) теплопроводности плазмы. В любых вариантах транспорт энергии происходит за счет разбаланса хаотического движения частиц теплового агента. В неоднородном случае налево и направо в данной

точке x_0 движутся частицы, пришедшие из областей с близкими, но различными значениями плотности их внутренней энергии $W(T)$ (рис. 2.7). Раскладывая величины, входящие в выписанную формулу, в ряд Тейлора по малому параметру ℓ/L , нетрудно записать, что

$$W_{\pm} = W(x_0 \pm \ell) \approx W(x_0) \pm \ell \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x_0} \rightarrow S_{Ex}|_{x_0} \approx -u \ell \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x_0},$$

где u — характерная скорость частиц, а ℓ — их длина пробега. Таким образом диффузионная локальность возникает как универсальное следствие «забывания» переносчиком своего состояния на макроскопически малом масштабе ℓ .

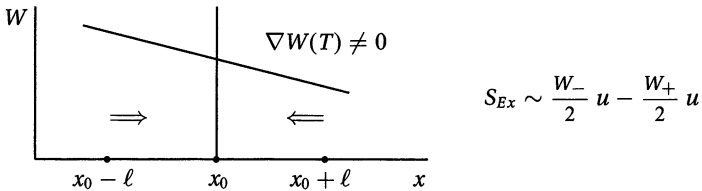


Рис. 2.7. К природе диффузионности переноса тепла

То, что при этом W и u равны соответственно U_b и c у фотонов, но $3/2 \cdot nT$ и v_{Te} у электронов, а также то, что на микроскопическом уровне электроны на длине пробега всего лишь рассеиваются, а кванты погибают и возрождаются, фактически никак не проявляется в макрокопике. Тип агента-переносчика определяет лишь величину кинетического коэффициента теплопроводности в $S_E = -\chi \nabla T$, но не характер процесса. Обычно $c \gg v_{Te}$ и $\ell_\gamma \gg \ell_e$ — фотоны быстры и «длиннопробежны», поскольку не обладают электрическим зарядом (особенно это важно в присутствии \mathbf{B} , способного напрочь «замагнитить» электронный канал), что с лихвой компенсирует их возможно небольшую энергоемкость и приводит к частому доминированию на практике лучистого канала транспорта тепла. Единственным препятствием этому в горячей плазме является нарушение необходимого условия $\ell_\gamma \ll L$, выводящее систему из локального режима и приводящее к $U \rightarrow 0$. Излучательные потери при этом могут оставаться сильными и существенными для общей энергетики, но перераспределение тепла внутри плазмы будет уже связано с электронной теплопроводностью (или просто ее гидродинамическим движением).

Именно лучистая теплопроводность во внутренних слоях Солнца (где сосредоточена почти вся его масса) доставляет энергию, выделяющуюся в центре за счет термоядерной реакции $4H \rightarrow He$, к внешней конвективной зоне, где в связи с понижением T кванты перестают

справляться с обеспечением необходимого потока. Огромная, доминирующая над гидродинамикой теплопроводность в этих слоях оказывает сильнейшее «сглаживающее» влияние, так что динамика плазмы здесь чрезвычайно спокойна в отличие от бурного перемешивания в последних 30% по радиусу. Ежели бы эти две транспортные зоны поменялись местами (что имеет место в некоторых типах звезд), то мы бы не наблюдали ни протуберанцев, ни солнечных пятен, ни факелов, а только тихую, благодатную картину.

Существенным для практики бывает вклад лучистой теплопроводности и в формирование температурного режима атмосфер различных планет, где она намного превышает обычную газовую теплопроводность и может быть вполне сопоставима с конвекцией, приводящей к ТРР (см. задачу 3).

ЗАДАЧИ

1. При каких условиях спектр объемного равновесного излучателя совпадает с планковским?

Решение. Очевидно, это происходит при однородном нагреве излучателя и постоянстве поглощения по спектру $l'_\omega = \text{const}$. Действительно, из (2.9) (см. также (2.10)) в этом случае следует, что $I_\omega \propto I_{\omega b}$ даже при $a_{\text{опт}} \ll 1$. Абсолютная величина (амплитуда) наблюдаемой интенсивности, конечно, остается много меньшей истинно равновесного значения и варьируется при наблюдении любого нешарообразного объекта с разных сторон, но ее форма (отношение вклада разных участков спектра) не позволяет определить тип источника (в смысле использованной номенклатуры). С хорошей точностью таково поглощение в инфракрасном и видимом диапазонах ($4\,000 \text{ \AA} < \lambda < 10\,000 \text{ \AA}$) на отрицательном ионе водорода H^- .

2. Решить в приближении лучистой теплопроводности с $l = \text{const}$ так называемую задачу о плоской звездной фотосфере: найти стационарное распределение температуры в среде, находящейся при $x < 0$, в которой из глубины наружу идет постоянный поток тепла S_0 , излучаемый на границе в вакуум.

Решение. Система описывается соотношениями

$$-\frac{cl}{3} \frac{dU_b}{dx} = S_0 = \text{const}, \quad S_0 = \frac{cU_b}{2} \Big|_{x=0}.$$

При учете связи $U_b = 4\sigma_{\text{св}} T^4 / c$ прямое интегрирование дает

$$T = \left[\frac{S_0}{2\sigma_{\text{св}}} \left(1 - \frac{3x}{2l} \right) \right]^{1/4}.$$

3. Найти закон изменения температуры атмосферы с высотой в условиях доминирования парникового эффекта — охлаждения планеты в мировое пространство за счет лучистой теплопроводности.

Решение. При парниковом эффекте видимый свет звезды (т. е. черное излучение высокой температуры в тысячи градусов по спектру, но ослабленное по интенсивности в квадрат видимого с планеты углового размера светила — в 10^4 раз для Земли) свободно проходит сквозь атмосферу и нагревает почву (реально заметная часть света отражается облаками и поверхностью, а также поглощается в верхних слоях атмосферы). Инфракрасное же излучение почвы (тоже черное, но с температурой лишь в сотни градусов) имеет малый пробег и хорошо задерживается воздухом. Стационарное состояние может быть модельно описано уравнениями равновесия атмосферы в поле силы тяжести и постоянства теплового потока от поверхности вверх

$$\frac{d(n_{ab}T)}{dx} = -n_{ab}M_{ab}g, \quad S_E = - \underbrace{\frac{k(T)}{n_{ab}}}_{x} \frac{dT}{dx} = \text{const} \quad \left(l \propto \frac{1}{n_{ab}} \right).$$

Здесь считается, что Росселандов пробег определяется поглощением на одном компоненте атмосферы, скажем, углекислым газе. Подстановка $n_{ab} \propto -k(T)T'$ из второго уравнения в правую часть первого после однократного интегрирования дает

$$n_{ab}T = M_{ab}g \frac{h}{S_E} \quad \left(h = \int_0^T k dT \right).$$

Обратная же подстановка полученного соотношения во второе уравнение после повторного интегрирования приводит к окончательному ответу

$$\int_0^T T d \ln h = M_{ab}g(x_0 - x).$$

В случае степенной зависимости l от T , т. е. $k \propto T^\alpha$ (см. следующую лекцию) профиль температуры оказывается (привычно) линейным

$$T = T_0 - \frac{M_{ab}g}{\alpha + 1} x$$

(а концентрации — степенным $n_{ab} \propto T^{\alpha+1}$), что для Земли с поглощением на CO_2 соответствует $\sim (\alpha + 1)^{-1} 50^\circ/\text{км}$ (ср. с конвективным ТРР). Любопытно отсутствие зависимости профиля от концентрации поглотителя, собственно, формирующего этот профиль. Она определяет лишь T_0 (при заданном S_E) и пределы применимости диффузионного описания $l \ll l_x$.

ЛЕКЦИЯ 4

Нелинейное уравнение диффузии. Автомодельные решения. Влияние гидродинамического движения. «Сквозное» описание лучистых потерь.

Как уже отмечалось в преамбуле к данной части, изучение задач из области переноса излучения естественным образом знакомит нас с важными и для общефизического образования понятиями и явлениями. Замечательным примером такого универсального явления служит, например, нелинейная диффузия, органически возникшая в прошлой лекции под именем лучистой теплопроводности. Убедимся в этом.

Итак, фотонный вклад в тепловой поток в термически равновесной по всем компонентам — т. е. и по излучению — среде представим в виде (ср. (2.12))

$$\mathbf{S}_E = -\frac{16\sigma_{SB}l(T)T^3}{3}\nabla T,$$

где подчеркнута как правило весьма существенная зависимость росселандова пробега от температуры. Это соотношение здесь было выведено как следствие постоянных актов поглощения–излучения, однако нетрудно понять, что учет рассеяния квантов может изменить лишь значение l , но никак не вид связи $\mathbf{S}_E \propto -\nabla T$, т. е. исследуемое приближение остается справедливым и в таком варианте. Если подставить это выражение в (2.8), посчитать диссипативный лучистый поток главным, учесть пропорциональность температуре входящего в левую часть тепла плазмы, и пренебречь движением среды в смысле $\mathbf{v} \rightarrow 0$, $d/dt \rightarrow \partial/\partial t$ (детальный разбор последних предположений будет дан ниже с использованием наработанного в их рамках знания), то соответствующее эволюционное уравнение диссипативного теплопереноса можно записать как

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(T^\alpha \nabla T) \xrightarrow{\nabla T \parallel \mathbf{e}_x} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{T^\alpha}_x \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (2.13)$$

Именно оно является предметом изучения в данной лекции. Для упрощения выкладок использованы безразмерные переменные, одномерное приближение, а также хорошо работающая на практике степенная аппроксимация $l(T)$ (своя для каждого конкретного случая). Как правило, $\alpha > 3$ — с ростом T запырять излучение становится все сложнее, так что «обычно» $dl/dT > 0$, и уж практически всегда, даже в областях с «аномальным» поведением $l(T)$, $\alpha > 1$, что и предполагается (если не указано иное) ниже. Это и есть нелинейная диффузия (здесь, строго говоря, температуропроводность). Она встречается во

множестве задач стохастического транспорта, например, мы сталкивались с нею в прошлой части при рассмотрении магнито- и ЭМГ-сопротивления.

Приходится признать, что теперь мы имеем дело с нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных и уже не можем так лихо выписывать его общее решение, как в случае (2.6). Такова цена глобальности (по углу и частоте) описания. Не так уж, однако, это и страшно. (2.13) вполне удобно для достаточно подробного и строгого изучения прогрева плазмы фотонами. Начнем с выявления особенностей поведения температурного профиля в нелинейном режиме на так называемом «фронте» $T \rightarrow 0$, вблизи которого можно положить, что $T(x - ut)$ (разумеется, это приближение, требующее оправдания результатом, см. ниже), т. е.

$$-u \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left(T^\alpha \frac{dT}{dx} \right) \rightarrow -uT - \underbrace{T^\alpha \frac{dT}{dx}}_{S_E} = \text{const.} \quad (2.14)$$

Нетрудно понять, что, поскольку в среде нет никаких дополнительных источников и стоков тепла, и весь поступающий из прилежащих теплых областей поток S_E расходуется исключительно на подъем T , то константу интегрирования в (2.14) следует положить равной 0 (т. е. $S_E \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$). Тогда следующее интегрирование дает

$$T \propto \begin{cases} (x_\Phi - x)^{1/\alpha}, & x < x_\Phi, \\ 0, & x > x_\Phi, \end{cases} \quad (2.15)$$

где новая константа интегрирования x_Φ как раз и является координатой фронта (рис. 2.8). Для «привычного» линейного варианта (2.13), (2.14) $T \propto \exp[-u(x - x_\Phi)]$, и она не имеет столь наглядного смысла.

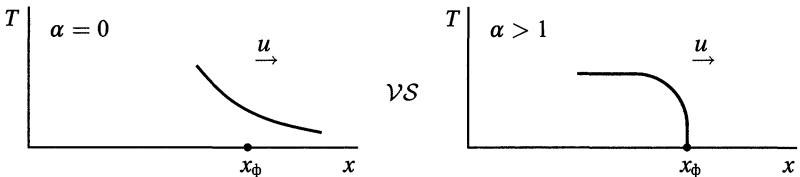


Рис. 2.8. Особенности «фронта» прогрева в нелинейном режиме

Очень примечательное и одно из самых ярких во всем последующем анализе свойство $T \equiv 0$ в еще непрогретых областях обязано своим происхождением тому, что $\chi(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$. Именно вертикальность касательной к температурному профилю на фронте и оправдывает

исходное предположение о доминировании здесь в эволюции T сдвига по сравнению с изменением формы. «Размазанность» $T(x)$ при $\alpha = 0$ уже не обеспечивает такой возможности, так что экспоненциальные «хвосты», изображенные на рис. 2.8, стандартно реализуются не в линейной, а тоже в нелинейной задаче. Естественно, на самом деле скейлинг $\chi \propto T^\alpha$ перестает выполняться при малых T , обычно он переходит во что-то вроде $\chi(T) \sim T^\alpha + \varepsilon$, в результате чего сформированный исключительно благодаря нелинейности крутой степенной фронт «выпускает» вперед себя экспоненту малой амплитуды $\sim \varepsilon^{1/\alpha}$.

Хорошо, установленный формулой (2.15) универсальный закон поведения будет по указанной выше причине встречаться почти во всех рассматриваемых в этой лекции задачах. Но что еще можно сказать о решениях (2.13)? Здесь самое главное понять, что общего у данного процесса с линейной диффузией и в чем его специфика. Очевидно, в новом случае отсутствует принцип суперпозиции, и, стало быть, у эволюционного оператора нет функции Грина, позволяющей находить общее решение. Но вот «забывание» в процессе ставшей нелинейной эволюции остается. Это замечательное свойство потери информации (роста энтропии) чрезвычайно облегчает анализ явления и повышает эффективность аналитических методов.

На математическом языке оно уже называется «притягивающей» автомодельностью, обеспечивающей универсализацию профиля и подымающей роль частных решений уравнений матфизики данного типа (в линейном варианте — параболического). Обычно свойства решений сильнейшим образом варьируются, и знание одного из них практически ничего не говорит о поведении системы в других случаях. Ситуация подобна вытаскиванию из (бесконечной!) горы фигурного шоколада одной штуки. Много ли мы узнаем о других его представителях? Иное дело, если на наше счастье все шоколадки (или их достаточно большая часть) со временем (например, из-за размягчения от жары) становятся круглыми. Тогда, наоборот, информация об удачно вытянутом экземпляре дает почти все.

Для уравнений сие значит, что асимптотически в результате диссипативной эволюции многообразие параметров, управляющих поведением решений (формой шоколадок), снижается от функционального к конечному, что позволяет редуцировать задачу от частных производных к обыкновенным. Иными словами, вместо «полномасштабного» решения $f(x, t)$, зависящего от произвольных функций, оказывается достаточным найти частное решение «пониженной размерности» $\tilde{f}(\xi, C_1, \dots, C_n)$, где так называемая автомодельная переменная $\xi = g(x, t)$ известна, а C_i — конечный набор констант.

Итак, у теоретиков есть мощнейший инструмент для почти полномасштабного решения уравнений типа (2.13), называемый *автомодельным разделением переменных*. Познакомимся с ним на примере задач, разобранных для линейной диффузии в четвертой же лекции первой части, только там мы вспоминали классические решения, а здесь будем их получать (вообще, полезно повторить выкладки для $\alpha = 0$ и сопоставить формулы с рисунками 1.7 и 1.8). Способ действия прост и состоит из двух вещей:

- учет симметрии уравнения;
- дополнительные соображения

(как правило, в качестве последних используется сохранение какого-либо интеграла).

Для (2.13) опыт подсказывает искать решение в виде

$$T = \frac{1}{t^\beta} \tau(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^\gamma}. \quad (2.16)$$

Симметрия связана с инвариантностью вида уравнения при одновременном масштабировании зависимых и независимых переменных согласно

$$T \rightarrow k_T T, \quad t \rightarrow k_t t, \quad x \rightarrow \underbrace{(k_T^\alpha k_t)^{1/2}}_{k_x} x \quad \Rightarrow \quad (2.13) \text{ inv.}$$

Она порождает эволюционный скейлинг «расплывания» $x \propto \sqrt{T^\alpha t}$ и, следовательно, диктует следующее универсальное соотношение между показателями β и γ :

$$\gamma = \frac{1 - \alpha\beta}{2}$$

(в данном случае $k_t = 1$, $k_T = t^{-\beta}$, $k_x = t^\gamma$). Соображения же, позволяющие выписать второе соотношение и определить эти показатели по отдельности, уже зависят от типа задачи.

Начнем, естественно, с начальной задачи: пусть исходно задано локализованное распределение $T(x, t = 0)$ в безграничной среде. Как происходит прогрев плазмы за счет лучистого транспорта? Нетрудно проверить, что в данном случае сохраняется полное количество тепла (интегральная запасенная энергия), что с необходимостью приводит к искомой второй связи

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T dx = A = \text{const} = \frac{t^\beta}{t^\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau d\xi \quad \rightarrow \quad \beta = \gamma = \frac{1}{2 + \alpha}.$$

Подставляя автомодельное выражение (2.16) с найденными показателями в (2.13), учитывая, что теперь

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \frac{\xi}{t} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{t^\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

и сокращая на общий множитель $t^{-\beta-1}$, получаем

$$-\frac{\tau}{\alpha+2} - \frac{\xi}{\alpha+2} \frac{d\tau}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\tau^\alpha \frac{d\tau}{d\xi} \right).$$

Поскольку из-за совпадения своих коэффициентов два члена в левой части объединяются в один, данная задача допускает полное интегрирование: сначала можно записать, что

$$-\frac{\xi\tau}{\alpha+2} = \tau^\alpha \frac{d\tau}{d\xi}$$

с нулевой константой (поскольку там, где нет тепла, нет и его потока, ср. с (2.14)), а потом и

$$\tau = \begin{cases} \left[\frac{\alpha(\xi_0^2 - \xi^2)}{2(\alpha+2)} \right]^{1/\alpha}, & |\xi| < \xi_0 \\ 0, & |\xi| > \xi_0 \end{cases}$$

с константой ξ_0 , определяемой исходным энергосодержанием плазмы

$$\int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \tau d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \sqrt{\pi} 2^{1-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)} \frac{\xi_0^{1+2/\alpha}}{(\alpha+2)^{1+1/\alpha}} = A.$$

Несмотря на сильные отличия полученного решения от $T(x-ut)$, закон (2.15), как и обещалось, прекрасно наблюдается при $\xi \rightarrow \pm\xi_0$. Эволюция профиля изображена на рис. 2.9 (ср. с рис. 1.7). Интересно,

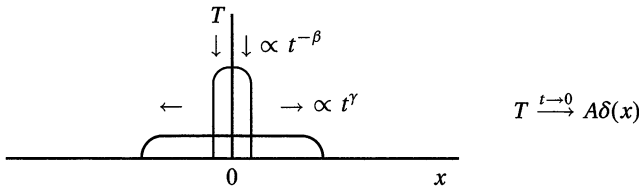


Рис. 2.9. Профиль температуры в начальной задаче

что автомодельное решение демонстрирует одинаковое с функцией Грина линейной задачи поведение при $t \rightarrow 0$ (и совпадает с этой функцией в случае $\alpha = 0$).

Найденные формулы описывают универсальный эволюционирующий профиль температуры, определяемый одним параметром (константой) A — начальной тепловой энергией. Можно показать, что асимптотически при $t \rightarrow \infty$ «невязка» точного (зависящего и от других деталей распределения $T(x, 0)$) и автомодельного решений (см. также лекцию 10)

$$\frac{T_{\text{точ}}(t) - T_{\text{авт}}(t)}{T_{\text{авт}}(t)} = O\left(\frac{1}{t^\delta}\right),$$

в этом и проявляется замечательное свойство «забывания» при диффузионной эволюции системы. Автомодельные решения есть и у гиперболических (гамильтоновых), и у эллиптических уравнений, но только в параболическом варианте они действительно представительны. Их сходимость (силу «притяжения») можно улучшать (увеличивать δ), расширяя параметризацию системы: например, если в данном случае к нулевому моменту начального распределения добавить положение его «центра тяжести»

$$x_0 = \frac{\int x T dx}{A}$$

(который также является интегралом движения) и «начало отсчета t » (связанное с исходно ненулевой шириной профиля $\int x^2 T(x, 0) dx$), выбрав автомодельную переменную в виде

$$\xi = \frac{x - x_0}{(t + t_0)^\gamma},$$

то удастся добиться значения $\delta = (2\alpha + 3)/(\alpha + 2)$.

Что касается граничной задачи о прогреве первоначально холодной среды с $T = 0$, расположенной в области $x > 0$, за счет поддержания каким-либо внешним источником на поверхности $x = 0$ либо температуры $T|_{x=0} = \text{const}$, либо потока тепла снаружи $S_E = -T^\alpha \partial T / \partial x|_{x=0} = \text{const}$, то в ней, очевидно, «сохраняться» будут именно эти величины, что дает второе соотношение в виде

$$\beta = 0 \quad \vee \quad \beta = -\frac{\gamma}{\alpha + 1}$$

соответственно. К сожалению, здесь в отличие предыдущего случая автомодельное уравнение для τ не интегрируется аналитически (за исключением линейного варианта), а только численно. Наблюдаемые профили T находятся с изображенными на рис. 1.8 примерно в том же отношении, как и рис. 2.9 с 1.7: общий характер поведения тот

же, только наличествуют другие временные скейлинги, определяемые соответствующими β и γ , и явно выраженные «фронты» (2.15) с

$$x_{\Phi} \propto t^{1/2} \vee t^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}.$$

Довольно любопытна также *дипольная задача*, представляющая собой своеобразную комбинацию двух уже рассмотренных. Она описывает ситуацию с начальным энерговыделением в среде, занимающей полупространство $x > 0$, у самой границы с пустотой, так что мгновенный (в смысле $c \rightarrow \infty$) уход на бесконечность приходящих сюда изнутри фотонов позволяет считать, что в процессе эволюции выполняется условие $T|_{x=0} = 0$. В других физических случаях, например, при нелинейной диффузии магнитного поля к этому же классу относится просто начальная задача с $A = 0$, когда исходный профиль B состоит из двух «половинок» разного знака с одинаковым по модулю потоком Φ , и нас интересует в точности асимметричное поведение этих половинок по отдельности. В силу данного условия при $x = 0$ в такой системе сохраняется так называемый дипольный момент тепла

$$\int_0^{\infty} xT dx = \text{const} = \frac{t^{2\gamma}}{t^{\beta}} \int_0^{\infty} \xi\tau d\xi,$$

позволяющий вычислить, что

$$\beta = 2\gamma \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \gamma = \frac{1}{2+2\alpha}.$$

Замечательным образом оказывается (см. задачу 2), что здесь снова удастся до конца проинтегрировать уравнение на τ , и

$$\tau \propto \xi^{1/(\alpha+1)} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{1+1/(\alpha+1)} \right]^{1/\alpha}.$$

Профиль $T(x, t)$ обладает двумя степенными «фронтами» с вертикальными касательными, но только подвижный правый соответствует (2.15). На левой же границе $S_E \neq 0$, т. е. в вакуум из плазмы уходит ненулевой поток тепла. Полезно понимать, что вариант с $\alpha = 0$ помимо вполне физических приложений описывает и классическую задачу о разорении игроков в «честном» казино. Постоянный дипольный момент означает сохранение суммарных денег при игре в равновесную «орлянку», а монотонно уменьшающийся $\int_0^{\infty} T dx$ — убыль контингента вследствие обращения денег в их карманах в 0.

Проведенный анализ позволяет подчеркнуть еще одно отличие нелинейной диффузии — наличие разных автомодельностей (показателей γ) в разных задачах, что, тем не менее, никак не снижает пользы

от универсальности или малопараметричности решений в каждом случае.

Ознакомившись с простейшей математикой, пора вспомнить, что на самом деле вся эта теплопередача происходит в обязательном порядке на фоне гидродинамического движения (в том числе даже и в виде ударных волн), возникающего вследствие наличия ∇P , несомненно связанного с ∇T . Что все же позволяет пользоваться упрощенным уравнением (2.13)? Проведем отложенный разбор этого обстоятельства. Гидродинамические возмущения в среде распространяются со скоростями $v \sim c_s$, т. е. размер охваченной ими области линейен по времени (рис. 2.10). Теплопроводностные же «волны» исходно очень

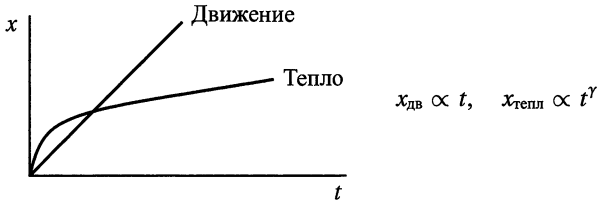


Рис. 2.10. Иерархия гидродинамики и теплопередачи

быстры, но двигаются с замедлением, в их степенном скейлинге показатель $\gamma < 1$. Это означает, что на начальных стадиях процесса они убегают вперед по практически неподвижному веществу с $n = \text{const}$, поэтому здесь из (2.2) следует

$$nT \frac{dS}{dt} = n \frac{dE}{dt} = c_V n \frac{dT}{dt},$$

и в пренебрежении $\mathbf{v} \rightarrow 0$ общее соотношение (2.8) строго переходит как раз в (2.13). Наоборот, при $t \rightarrow \infty$ возбужденное перераспределением температуры движение успевает затухнуть, в системе устанавливается равновесие $P = nT = \text{const}$, и первое начало может быть записано как (см. также задачу 2 в лекции 3)

$$nT \frac{dS}{dt} = c_P n \frac{dT}{dt},$$

что опять-таки в пренебрежении \mathbf{v} приводит к безразмерному (2.13). Итак, разные причины медленности движения (вещество либо не успевает прийти в движение, либо как раз с лихвой успевает «установиться») обеспечивают одно приближение. В промежуточной области времен все гораздо сложнее, в плазме бегают взад-вперед ударные волны различной интенсивности, она смещается, сжимается, расширяется и пр.

Небольшое пояснение к сказанному. В принципе, перераспределение P приводит к тому, что в равновесии $n = n(x)$. В этом случае можно трактовать уравнение (2.13) как записанное в так называемых лагранжевых переменных $x \rightarrow N = \int^x n(x') dx'$ (довольно часто $\chi \propto l \propto 1/n$). Полезно также обратить внимание на то, что в обычном газе с обычной теплопроводностью столь замечательный для использования упрощенного уравнения теплопроводности режим $x_{\text{тепл}} \gg x_{\text{дв}}$ отсутствует, ибо в такой среде

$$x_{\text{тепл}}^2 \sim \underbrace{v_T l}_\chi t \sim x_{\text{дв}} l$$

(поскольку $c_S \sim v_T$), а для макроскопического описания обязательно требуется выполнение условия $l \ll x$.

На этом знакомство с особенностями поведения излучения во втором из двух предельных режимов, выявленных в предыдущей лекции, можно считать завершенным. Как и всякие крайности эти режимы относительно просты в изучении и использовании, однако хотелось бы все же иметь хотя бы и приближенное, но единое (оно же «сквозное») описание лучистого теплопереноса, охватывающее случаи и объемных, и поверхностных потерь, ибо ситуация в реальном процессе нагрева (охлаждения) плазмы может меняться. Эффективные уравнения должны быть относительно просты и более приспособлены к физическому оперированию, нежели «недосуммированное» базовое (2.6). Приведем два из многочисленных расхожих вариантов.

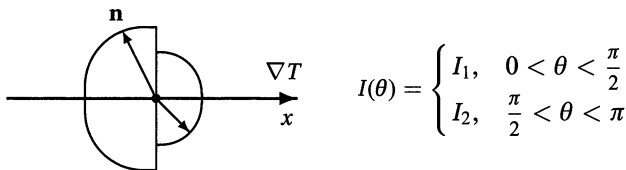
Диффузионное приближение для «серого» вещества. Базируется на постулировании равенства пробегов ($l' = l$) и использовании двух интегральных моментов (2.6)

$$\text{div } \mathbf{S}_E = \frac{c}{l} (U_b - U), \quad \mathbf{S}_E = -\frac{cl}{3} \nabla U, \quad \mathbf{S}_E|_\Gamma = \frac{cU}{2} \mathbf{n}_0. \quad (2.17)$$

Его недостатки или неточности: плохое описание вклада дискретных линий и неадекватность диффузионного приближения в сильно анизотропном случае больших пробегов — вывод (2.11) критичен к использованной малости асимметрии $I_\omega(\mathbf{n})$. Тем не менее, качественно это приближение «работает» практически всегда. Ничто (кроме оперативности вашего компьютера) в случае особой нужды не мешает сделать шаг назад и вернуться к зависимым от ω соотношениям, используя известные или доступные вам аппроксимации l'_ω на разных участках спектра (так называемое n -групповое приближение).

Приближение «вперед–назад». Стандартно одномерное, оно разделяет все фотоны на две группы в зависимости от того, движутся ли

они в положительном или отрицательном направлении относительно градиента температуры, внутри которых распределение I считается изотропным по соответствующей полусфере (рис. 2.11). Учитывая,



$$I(\theta) = \begin{cases} I_1, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ I_2, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Рис. 2.11. К выводу приближения «вперед–назад»

что в этом случае $d/ds = \cos \theta d/dx$, и усредняя базовое (2.13) по полусферам $2\pi \supset$ и $2\pi \subset$ ($\langle \cos \theta \rangle = \pm 1/2$), можно записать

$$\frac{1}{2} \frac{dI_1}{dx} = \frac{I_b - I_1}{l'}, \quad -\frac{1}{2} \frac{dI_2}{dx} = \frac{I_b - I_2}{l'}, \quad I_-|_{\Gamma} = 0. \quad (2.18)$$

Сложение и вычитание этих уравнений вкупе с соотношениями $U = 2\pi(I_1 + I_2)/c$ и $S_E = \pi(I_1 - I_2)\mathbf{e}_x$ дает предыдущий вариант с заменой $1/3 \rightarrow 1/4$. Решают, однако, именно данную систему. Неточности: помимо указанных для напарника, замена интегральной экспоненты обычной. Модель хорошо приспособлена для компьютерных расчетов, введение в нее l'_ω также бывает полезным.

Конечно, как уже говорилось из общих соображений и будет на конкретных примерах обсуждаться в лекциях 6–8, используемое в обоих моделях совмещение пробегов l и l' , существенно упрощающее формулы, не вполне оправдано строгой теорией, но существует и физический пример такого совпадения — это упомянутое в задаче 1 в третьей лекции поглощение на ионе H^- . Основные проблемы подобных простых моделей, собственно, аналогичны обсуждавшимся в первой части опасностям (но и притягательности) использования гидродинамического (здесь — моментного по углам и отчасти по частотам) описания среды в заведомо кинетической области.

В заключение данной лекции используем наработанные знания о предельных режимах для прикидки и сопоставления темпа охлаждения оптически тонких и толстых тел. Парадоксальным образом оказывается, что в любом случае они теряют энергию гораздо хуже истинно черных объектов, хотя и по разным причинам. Тонкая плазма с $a \ll l'$ — из-за того, что в ней мала плотность излучения (см. (2.10)):

$$\frac{cU_b}{l'} a^3 \sim \sigma_{SB} T^4 a^2 \frac{a}{l'} \ll Q_b.$$

Толстая же с $a \gg l$ — вследствие малости ее поверхностной температуры, «просевшей» в результате высвечивания наружу (см. (2.11)):

$$\frac{clU_b}{a} a^2 \sim \sigma_{\text{СВ}} T^4 a^2 \frac{l}{a} \ll Q_b.$$

Все в этой жизни не так уж банально, но поведение излучения в плазме с заданными свойствами теперь нам понятно и доступно.

Как же они задаются или как получают необходимые для предъявленного в этой и прошлой лекциях анализа выражения $I'_\omega(T, \dots)$? Для постижения этого вопроса надо понять, что происходит с электронами.

ЗАДАЧИ

1. Какая особенность граничной теплопроводностной задачи с $T|_\Gamma = T_0$ проявляется, начиная с размерности пространства 3 и выше?

Решение. Особенность связана со сменой поведения стационарных решений (2.13), к которым стремится $T(x, t)$ в данной задаче. Если ввести новую единую пространственную переменную r и положить границу расположенной при $r = r_0$, то уравнение теплопроводности (диффузии) в изотропном варианте примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{k-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{k-1} T^\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (r > r_0, k = 1, 2, 3, \dots), \quad T|_{r_0} = T_0.$$

Оно описывает прогрев окружающего пространства некой печкой в форме полупространства, бесконечного цилиндра, сферы или гиперсферы. Система всегда эволюционирует в направлении своей стабилизации $\partial T / \partial t \rightarrow 0$ (диссипативность!), но иерархия возможностей зависит от размерности задачи k . Действительно, второй порядок правой части эволюционного уравнения дает два независимых стационарных решения — с постоянством температуры или потока:

$$T = T_0 = \text{const} \quad \vee \quad T = \left(S_0 \frac{\alpha + 1}{k - 2} r^{2-k} \right)^{1/(\alpha+1)}, \quad S_0 = \text{const}.$$

Начиная с $k = 3$, последнее становится ограниченным при $r \rightarrow \infty$, и из-за своего убывания получает преимущество в реализации по отношению к первому, что в корне меняет ситуацию. В одномерном и двумерном случаях печка асимптотически греет до своей температуры все пространство в том смысле, что сколь бы далеко от нее не располагалась точка наблюдения, рано или поздно температура в ней станет близка к T_0 . Реально это происходит все позднее и позднее, ибо поток тепла наружу неограниченно и монотонно убывает (см. рис. 1.8 для $k = 1, \alpha = 0$). А вот при $k > 2$ формируется неоднородный профиль, поставляющий практически постоянный поток вглубь среды, но этого потока все равно не хватает для ее прогрева, вдали от печки всегда холодно. Говорят, что пространство большого числа измерений «слишком быстро» наращивает свой объем.

2. Найти профиль автомодельного решения дипольной теплопроводностной задачи при произвольных α (Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович).

Решение. В оригинальном подходе предлагалось записать исходное уравнение в виде

$$-\tau - \frac{\xi}{2} \frac{d\tau}{d\xi} = \frac{d^2\tau^{\alpha+1}}{d\xi^2}$$

(что избавляет от общего множителя $1/(\alpha + 1)$), после чего, домножив его на ξ , однократно проинтегрировать

$$\xi \frac{d\tau^{\alpha+1}}{d\xi} - \tau^{\alpha+1} + \frac{\xi^2\tau}{2} = \text{const} = 0.$$

Дальнейшее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка стандартно:

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha} \xi \frac{d\tau^\alpha}{d\xi} - \tau^\alpha + \frac{\xi^2}{2} = 0 \rightarrow \tau \propto \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{1/(\alpha+1)} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{1+1/(\alpha+1)}\right]^{1/\alpha}$$

$$(0 \leq \xi \leq \xi_0).$$

Возможна и другая метода действий, также опирающаяся на отличие показателей β и γ ровно в два раза, что позволяет свести левую часть автомодельного уравнения к полной производной в два шага (ср. с начальной задачей):

$$-\tau - \frac{\xi}{2} \frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{\tau}{2} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi\tau}{2}\right) \stackrel{\tau=\eta'}{=} -\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\eta + \xi\eta'}{2}\right) = -\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{\xi\eta}{2}\right).$$

После уже двукратного (с по-прежнему нулевыми константами) интегрирования автомодельного уравнения отсюда следует

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{\xi\eta}{2}\right)^{1/(\alpha+1)}$$

с, естественно, тем же ответом.

3. Идеология указанных простых моделей может с успехом применяться и в других транспортных задачах. Как выглядит в приближении вперед-назад эволюция излучения в среде с доминированием элементарных процессов рассеяния квантов?

Решение. В этом случае в пренебрежении актами поглощения и рождения излучения эволюция сводится к взаимному превращению фотонов, движущихся налево и направо с сохранением их полного числа, и посему описывается уравнениями

$$\frac{1}{2} \frac{dI_1}{dx} = \frac{I_2 - I_1}{l'}, \quad -\frac{1}{2} \frac{dI_2}{dx} = \frac{I_1 - I_2}{l'}.$$

4. Исходя из выписанных уравнений, решить задачу о «свежевыпавшем снеге»: найти и сравнить распределения лучистой энергии в туманной рассеивающей среде $-L < x < 0$, на которую слева из минус бесконечности падает свет интенсивности J , а правая граница обладает альбедо 1 (только что выпавший снег) или 0 (голая земля).

Решение. Уравнения следует дополнить граничными условиями: общим $I_1(-L) = J$, а также специфичными $I_2(0) = I_1(0)$ в первом варианте и $I_2(0) = 0$ во втором. Тогда истинно зимний случай даст тривиальный закон $I_1 = I_2 = J$, в то время как бесснежный пейзаж при учете соотношения $I_1 - I_2 = \text{const}$ будет описываться формулами

$$I_1 = -J \frac{2x + l'}{l' + 2L}, \quad I_2 = -J \frac{2x}{l' + 2L}.$$

Следовательно, при $L \gg l'$

$$\frac{U_{\text{снег}}}{U_{\text{зем}}}\bigg|_{x=0} \approx 4 \frac{L}{l'} \gg 1,$$

т. е. выпадение снега сильно повышает освещенность даже в пасмурные дни и ночи (последние при наличии луны).

ЛЕКЦИЯ 5

Элементарные процессы возбуждения и излучения. Различные типы ионизационного равновесия. «Подавленность» обратных процессов в плазме. Диелектронная рекомбинация. Аппроксимационные формулы для z и «эффективные» показатели адиабаты. Томсоновское рассеяние, эффекты когерентности.

Итак, что представляет собой среда, через которую распространяется и где живет излучение? Прежде чем интересоваться, что она в состоянии сделать с квантами, следует изучить или понять как изучают ее собственное состояние. Для теоретического определения и вычисления необходимых в задачах фотонного энерготранспорта характеристик плазмы используют весьма сложные методы из термодинамики и кинетики. Однако оказывается, что для качественного понимания возникающих проблем достаточно представления всего о двух типах элементарных процессов с участием наиболее «быстрых» (т. е. «легких») — при данной энергии скорость движения растет с уменьшением массы) частиц: электрона с электроном (далее $e - e$) и электрона с γ -квантом ($e - \gamma$), поскольку $\gamma - \gamma$ в данном круге проблем взаимодействуют исключительно через среду же, но не непосредственно. В настоящей книге эти процессы считаются базовыми, и все трактуется исключительно через них. Роль тяжелых (непосредственно ионов, нейтралов и пр., а не их связанных электронов) в реальных процессах существенна, когда легких мало. Как и декларировалось, в знакомстве будем по возможности использовать классический подход, а из всего многообразия последствий взаимодействия интересоваться самым важным и грубым — передачей энергии.

1. Возбуждение. Оно же девозбуждение, ионизация и т. п. Заключается в том, что быстро пролетающий свободный электрон резко «дергает» («толкает») медленный связанный либо свободный же, сообщая последнему некий импульс Δp , легко оцениваемый по характерным силе и времени взаимодействия (рис. 2.12). В результате такого акта его связанный собрат приобретает и малую долю

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{e^4}{r^2 \mathcal{E}}$$

от $\mathcal{E} = mv^2/2$ — механической энергии электрона свободного. С уменьшением прицельного расстояния r согласно этой формуле $\Delta \mathcal{E}$ растет, поэтому попадание в площадь $\sigma \sim r^2$ приводит к передаче большей или равной данной, что и позволяет использовать понятие сечения возбуждения $\sigma_{ex} \sim e^4/(\mathcal{E}\Delta \mathcal{E})$. Очевидно, что проведенный вывод

принципиально основывается на предположении о $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \rightarrow 0$, причем в учебниках обычно содержится предупреждение, что такая оценка

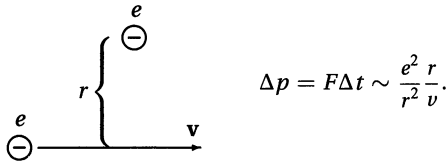


Рис. 2.12. Процесс возбуждения

очень груба даже при $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \sim 0,1$, но мы для своих целей будем ею пользоваться во всем диапазоне $\mathcal{E} > \Delta\mathcal{E}$, самым примитивным и нахальным образом вводя «обрезание» в нефизической области с помощью ступенчатой функции Хевисайда:

$$\sigma_{ex} \sim \theta(\mathcal{E} - \Delta\mathcal{E}) \frac{e^4}{\mathcal{E}\Delta\mathcal{E}} \quad (2.19)$$

(естественно, даже очень быстрый электрон не способен отдать больше, чем имеет).

2. Излучение. Оно же поглощение, рассеяние и т.п. Связано с ускоренным (как правило, искривленным) движением электрона. В качестве наглядной картины можно считать, что он вращается по окружности радиуса r с круговой частотой ω (рис. 2.13). Его рассредоточенное в пространстве поле пытается отслеживать движение своего локализованного источника, но на расстояниях $R > \lambda$ перестает поспевать в силу скоростных ограничений, после чего отрывается от электрона (как бы «стряхивается» им), начиная жить собственной — согласно уравнениям Максвелла исключительно волновой — жизнью.

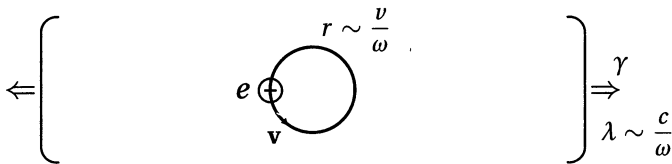


Рис. 2.13. Процесс излучения

Можно привести аналогию с отряхиванием собаки от воды, только следует понимать, что в данном контексте размер «капель» куда больше самой собаки: $r \ll \lambda$ при нерелятивизме движения. Темп рождения излучения опять-таки легко оценивается из следующих соображений.

Величина осциллирующего поля в этой весьма далекой от источника зоне (называемой волновой) рождения волны $R \sim \lambda$ рассчитывается с помощью разложения в ряд Тейлора

$$E \sim \frac{e}{(\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{r}})^2} \rightarrow \tilde{E} \sim \frac{e}{\lambda^2} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\lambda}$$

и обладает дополнительной к регулярному так называемой дипольной — она же релятивистская $\sim v/c$ — малостью первого порядка. Ее наличие связано с законом сохранения заряда (или, если угодно, с поперечностью электромагнитных волн), не позволяющего просто создавать в замкнутой области осцилляции заряда \tilde{e} (в акустике, например, флуктуации объема не запрещены и существует монопольное излучение). В волне $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{E}$, вектор Пойнтинга $S_E \sim c\tilde{E}^2$ уносит энергию, грубо говоря, через площадь λ^2 , следовательно энергетические потери электрона есть

$$\dot{\mathcal{E}} \sim c\tilde{E}^2 \lambda^2 \sim \frac{e^2 c}{\lambda^2} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \sim \omega^4 \frac{\tilde{d}^2}{c^3}, \quad (2.20)$$

где $\tilde{d} \sim er$ — переменный дипольный момент излучающей частицы. В точном выражении для интенсивности этого, понятно, *дипольного излучения* стоит множитель $2/3$ — неплохо для столь грубой модели!

В жизни встречаются и другие ситуации. Например, при столкновениях электронов или любых частиц с одинаковым e/m между собой у системы $\ddot{\mathbf{d}} \equiv 0$ — два участника взаимодействия испытывают противоположные ускорения. В результате в первом приближении по r/λ (или v/c) порождаемые ими переменные поля компенсируют друг друга, и в выражении для \tilde{E} требуется учет высших членов разложения: это уже *квадрупольное, октупольное* etc. излучение. Можно подойти к проблеме «отрывающихся» флуктуаций и с другой стороны: в периодическом движении электрона наряду с основной присутствуют и кратные гармоники $2\omega, 3\omega$ etc., вклад которых в квадратичную по полю интенсивность потерь содержит тот же множитель $(v/c)^2$ при каждом дополнительном номере. Следует помнить и о *магнитодипольном излучении* (равно как и связанном с высшими магнитными моментами) из-за переменности $\tilde{\mathbf{B}}$, где с самого начала уже на уровне источников ($j \text{ vs } \rho$) содержится малость v/c .

Согласно квантовой номенклатуре это все называется правилами отбора (в терминологии используются такие понятия как матричные элементы, симметрии, многофотонность etc.). Но нам важно следующее, ясно видимое из изложенного примитивного подхода. Оказывается, интенсивность $e - \gamma$ процессов в различных ситуациях варьируется на много порядков величины в одну сторону — от малого

к гораздо меньшему. По сравнению с $e - e$ энергообменом здесь взаимодействие всегда (но в разной степени) ослаблено релятивистскими эффектами. Понять это просто: фотон слишком быстр, электрону трудно успевать передать ему энергию. Разговор же о квантовании поднят потому, что не менее существенный вклад, как выяснится в дальнейшем, в снижение эффективности процесса вносят и квантовые, пока скрытые эффекты. На самом деле формула (2.20), давая правильный ответ, своим здешним выводом создает опасную иллюзию равномерного и плавного характера излучательных потерь вращающимся электроном. Это было бы так (и есть так, но для гораздо больших, макроскопических зарядов), если бы за один оборот происходило рождение множества квантов с ничтожным «дробовым» эффектом. В реальности ситуация прямо противоположна:

$$\frac{\dot{\epsilon}\omega^{-1}}{\hbar\omega} \sim \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1,$$

даже практически не рассматриваемый здесь релятивистский электрон рождает фотоны в сильных, но редких дискретных «конвульсиях». С точки зрения наглядной классической картины «оторванное» поле довольно долго ждет и начинает излучаться, только когда накопится достойная порция (стоит еще раз напомнить о крайней условности таких аналогий). Говорят, что $e^2/(\hbar c)$ (или просто e) в нашем мире мало (или \hbar велико).

Будем считать, что примитивное представление об элементарных процессах получено. Прежде чем по-настоящему включиться в работу и начать применять его к вычислению пробегов излучения в плазме, сосредоточимся, как и было обещано, на попытке понять, о какой, собственно, плазме должна идти речь в предстоящих расчетах, т. е. будем исследовать состояние «катализатора». Исходя из уже сделанных в этой части многочисленных упоминаний и оговорок о равновесности среды, можно представить, насколько важно для реальных ситуаций наличие или отсутствие этого свойства. Итак, когда же плазма равновесна? Какие характеристики определяют эту особенность? В данной лекции эти вопросы к термодинамике и кинетике разбираются на примере ионизационного состояния плазмы, т. е. решается проблема о составе ее свободных компонент — какие ионы с каким z присутствуют в системе и, следовательно, сколько в ней электронов. Разбор не менее важной задачи о свойствах связанного электронного компонента отложим до лекции 9.

Итак, рассмотрим баланс процессов ионизации и рекомбинации, приводящих к рождению и гибели ионов с зарядом z . Для простоты считается, что уже достигнуто равновесное (стационарное) состоя-

ние, а свободные электроны распределены по Максвеллу (т. е. внутри системы существует практически идеальный термостат, способный, если ему будет позволено, привести в термодинамическое соответствие всю плазму). Тогда

$$\dot{n}_z = \underbrace{nn_{z-1}\langle\sigma_i v\rangle}_{\text{ион. эл. ударом}} + \underbrace{n_\gamma n_{z-1}\langle\sigma_{\text{ph}} c\rangle}_{\text{фотоэффект}} + \dots \\ \dots - \underbrace{n^2 n_z \kappa_3(T)}_{\text{трехчаст. рек.}} - \underbrace{(1 + \alpha_{\text{инд}} n_\gamma) n n_z \langle\sigma_{\gamma r} v\rangle}_{\text{фоторекомбинация}} - \dots = 0. \quad (2.21)$$

Здесь использованы вполне понятные обозначения для концентраций реагирующих компонент, в том числе и фотонной, и констант соответствующих реакций. Под многоточиями скрываются другие типы элементарных процессов, не столь важные для предварительного грубого анализа. Они могут быть и принципиально отличными, подобно упоминаемой ниже дизлектронной рекомбинации, и аналогичными уже выписанным (например, производство ионов z за счет рекомбинации ионов $z + 1$). В реальных ситуациях (2.21) записывается в виде системы уравнений для всех возможных z , решение которой позволяет определить представительство различных ионов в плазме — так называемый *ионный спектр*.

Метод выглядит весьма громоздким, но здесь уместно вспомнить рассуждения из второй лекции предыдущей части относительно вклада в физические процессы различных членов. В действительности все эти многочисленные аддитивно входящие в верхнюю и нижнюю строчки баланса (2.21) элементарные акты практически всегда находятся в жесткой иерархии. Как правило, по физике дела в обеспечении любого сложного равновесия доминируют два главных члена — один прямой и один обратный процессы (в каждом конкретном случае выбор их диктуется состоянием системы). Вероятность «одномасштабности» разных эффектов, по-разному функционально зависящих от параметров плазмы, мала. В разбираемой проблематике принято выделять два предельных случая.

Начнем как раз с *термодинамического равновесия*, связанного с так называемым детальным балансом прямых и обратных процессов. Оно характерно как для «толстой» плазмы, когда вследствие запертости излучения его плотность n_γ велика ($U = U_b$) и доминируют акты с участием квантов (ионизация за счет фотоэффекта и фоторекомбинация, в том числе и индуцированная), так и ее «плотной» ипостаси с большим значением уже n и выходом на первый план чисто электронных процессов (ионизации электронным ударом

и трехчастичной рекомбинации, когда свободный электрон, столкнувшись вблизи иона z со своим напарником, отдает тому избыточное $\Delta\mathcal{E}$, опускаясь в отрицательную область полных энергий, т. е. в дискретный спектр). Вполне допустимы и оба варианта одновременно. Кинетику здесь считать не стоит, можно исходить из универсальных термодинамических законов — равенства химпотенциалов в обратной реакции

$$i_{z-1} \leftrightarrow i_z + e.$$

Таким образом получают формулу Саха

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} \sim \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{mT}}{\hbar} \right)^3 \exp\left(-\frac{J_{z-1}}{T}\right) \quad (2.22)$$

(в пренебрежении дополнительными статвесами). Чрезвычайно резкая экспоненциальная зависимость присутствия данного иона z от потенциала ионизации его предшественника J_{z-1} приводит к узости ионного спектра любого элемента — степень его «обдирки» варьируется не более, чем на $\Delta z = 2 \div 3$.

Характернейшая особенность термодинамического режима — большой предэкспоненциальный множитель в (2.22) (велик не только он, но и его логарифм), который можно представить в виде $(n\lambda_{eT}^3)^{-1} \sim (T/\mathcal{E}_F)^{3/2}$, где $\lambda_e \sim \hbar/(mv_e)$ — де-бройлевская длина волны электрона, а дополнительный индекс T указывает на характерную энергию этого электрона. С физической точки зрения допустимо полагать, что он равен отношению объемов, приходящихся на один электрон в свободном и связанном состоянии (точнее, именно его логарифм порядка логарифма такого отношения). Действительно, с такой точностью энергии T и J вполне сопоставимы (см. ниже), и потому $\lambda_{eT} \sim \lambda_{eJ}$, а «размер» иона определяется именно волновыми свойствами связанных электронов. Большая величина этого параметра говорит о том, что ионы в не предельно плотной плазме «не трутся» своими оболочками, и электронам выгодно свободно «разбегаться» — есть куда. По аналогии с N_D еще не раз встречаемая комбинация $n\lambda_{eT}^3$ может быть названа «де-бройлевским числом» $N_{дв}$, как правило, наоборот, весьма малым. К эффекту можно подойти не только со статистической, но и кинетической точки зрения. С этой позиции причиной появления большой предэкспоненты является разный порядок прямой и обратной реакции: для рекомбинации по любому каналу требуется лишний (относительно ионизации в парном процессе) близкий свободный электрон, причем необходимая близость определяется его квантовой «размазкой» по пространству $\lambda_{eT} \ll n^{-1/3}$ (в условиях доминирования его кинетического импульса над фермиевским $p_T \gg p_F$).

Следствием указанного обстоятельства является заметная обдирка порядка $O(1)$ уже при

$$T \sim \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{10} \right) J.$$

Зависимость же степени ионизации от n слаба (является логарифмической).

Другой вариант стационара (2.21) — *корональное равновесие*. Название связано с тем обстоятельством, что такое состояние характерно для короны Солнца (внешнему по отношению к обычно наблюдаемому его слоям) и вообще звезд. Оно реализуется в случае одновременно и «тонкой», и «редкой» плазмы, когда подавлены процессы, зависящие как от n_γ , так и от лишних степеней n . Здесь баланс обеспечивают ионизация электронным ударом и фоторекомбинация:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = K(T) \exp\left(-\frac{J_{z-1}}{T}\right). \quad (2.23)$$

Предэкспонента уже не зависит от n , а наличие знакомой функции \exp связано с тем банальным обстоятельством, что обдирают ион $z - 1$ лишь те электроны максвелловского «хвоста», у которых хватает на то энергии (см. задачу 1). Естественно, спектр z является узким и в этом пределе.

Замечательно, что, несмотря на одинаковый порядок прямой и обратной реакций по электронам, переионизация плазмы (малость T/J у представленных в ней ионов) характерна и для этого режима. Тут все дело в специально подчеркнутом выше крайне плохом взаимодействии электронов и квантов, замедляющем рекомбинационный процесс. Численная величина эффекта ($\ln K \gg 1$) будет оценена далее в лекции 7, когда мы научимся определять $\sigma_{\gamma r}$, теперь же желательно хорошо запомнить, что в плазме обратные процессы в рамках (2.21) ослаблены. Интересно, что, поскольку обычно в ионизации главенствует все-таки канал электронного удара, то в каждом конкретном практическом случае реализуется равновесный режим с хотя и большой, но минимальной из возможных ионизацией (доминирует максимальный обратный процесс), т. е. система выбирает из двух «зол» меньшее.

Для поднимаемых в этой части вопросов рождения и распространения излучения сквозь среду важно понимать, что в корональной плазме отсутствует однозначная термодинамическая связь I'_ω с j_ω (2.5), использованная при выводе базового (2.6), поэтому рождение и транспорт квантов в ней идут по-другому. Малая толщина среды и свободный выход фотонов не обязательно примитивизируют задачу (см. лекции 9 и 10).

Исходно описанная система ценностей в рамках (2.21) вырабатывалась в связи с проблемой УТС и звездных атмосфер с явным доминированием ионов изотопов водорода. Однако в последующем более пристальное внимание к плазме с «тяжелыми» ионами, сохраняющими электронные оболочки даже при высоких температурах, выявило принципиальную важность и других — с участием как раз связанных электронов — элементарных процессов в установлении равновесия. Ключевой для нас является так называемая *дизэлектронная рекомбинация*. Она заключается в том, что «сажающийся» на орбиту вокруг иона электрон передает избыток энергии не свободному, а связанному, находящемуся на внутренних оболочках напарнику за счет его возбуждения. Нетрудно понять, что в этом процессе уже нет никакого ослабления — взаимодействуют частицы одной природы, и третий электрон всегда «под рукой», вероятность его появления в доступной области не мала. Правда, получившееся состояние является автоионизационным, полная энергия системы все еще положительна, рекомбинация «недозавершена», что требует более детального анализа, к которому мы вернемся опять-таки в лекции 7. Тем не менее, следует знать, что с современной точки зрения «корональным» считается равновесие с обязательным учетом этого процесса.

Теперь дадим некий комментарий к явно или неявно сделанным при анализе ионного состава плазмы предположениям. Поскольку потенциал ионизации в любом случае (2.22), (2.23) входит в показатель экспоненты, кажется необходимым учет в балансе возбужденных состояний s , возможно, гораздо меньшими J . На самом деле, однако, в аналогичном балансе по возбуждениям нет подавленности обратных процессов, здесь «работает» только экспонента, поэтому реально роль верхних, не основных уровней в ионизации мала (см. лекцию. 9). Электроны стремятся ионизоваться, а не возбудиться (вырваться на свободу, а не на длинную цепь, изменить сущность, а не просто энергосостояние). Тем не менее, даже при этом упрощении технически выбор режима в рамках (2.21) (точнее, аналогичной системы) не всегда прост. Видно, что на тип равновесия влияют не только локальные характеристики типа n и T , но и транспорт излучения ($n_\gamma \propto U$). Что уж говорить о том, что на практике отнюдь не обязательно, чтобы электронный компонент плазмы имел максвелловское распределение по скоростям, а система в целом успевала приходиться к стационару.

Что ж, после осознания проблем конкретных расчетов, можно пойти дальше и взять на вооружение для практических оценок их результаты. На основе анализа графиков и таблиц, полученных с использованием точных и приближенных квантовых моделей различными авторами, удобно выделить следующие аппроксимации «среднего

заряда» иона данного элемента в плазме (т. е. $\sum(zn_z)/\sum n_z$), обеспечивающие точность не хуже 20%:

T	$1 \div 50$	$10 \div 500$	$5 \cdot 10^2 \div 10^4$
z	$0,7 T^{2/3}$	$T^{1/2}$	$2,5 T^{1/3}$

Первый скейлинг автор узнал от Л. И. Рудакова, третий — от В. С. Лисицы. Что касается чрезвычайно популярного в силу простоты второго, то его следует отнести к научному фольклору. Зависимость степени ионизации от n как правило слаба и может быть опущена, степени T в колонках связаны, по всей видимости, с балансом $T \propto J_z$ и скейлингами $J(z)$ в законах Томаса–Ферми ($\propto z^{2/3}$) в первом случае и Ридберга ($\propto z^2$) во втором. «Рабочие» диапазоны температур для разных аппроксимаций приближительны. Стандартный алгоритм выбора скейлинга для оперирования — идти слева, меняя концепцию за счет сдвига вправо как только нарушается естественное требование $z \leq z_{\text{я}}$. Скажем, для Al при 100 эВ первый скейлинг дает $z \sim 15$, что заведомо больше заряда ядра. А вот второй — $z \sim 10$ — вполне приемлем. Если и третий вариант приведет к $z > z_{\text{я}}$, то делать нечего, элемент ионизован полностью. Следует понимать, что, хотя в принципе эти формулы возникли в результате обработки расчетов, в каждом из которых был виден вполне определенный режим равновесия (при малых температурах — термодинамический, при больших — корональный), точность аппроксимаций эти режимы практически не различают. Причина — во все той же резкой экспоненциальной зависимости $n_z(J_z)$, не допускающей варьирования z в разы при смене режима стационара.

Ионизация важна не только для формирования состава среды, она также влияет и на другие, даже, казалось бы, чисто гидродинамические характеристики плазмы — например, на показатель ее адиабаты. Действительно, поскольку при нагреве системы тепловая энергия затрачивается (а при охлаждении выделяется) и на перевод связанного электронного компонента в свободный, то эту (очень немалую) добавку следует учитывать в энергии единицы объема электронного газа:

$$c_V nT = \frac{3}{2} nT + n_i \sum_{k \leq z} J_k, \quad c_V = \frac{1}{\gamma - 1} \quad \rightarrow \quad \gamma = 1 + \frac{P}{nE}.$$

Следовательно, если $J \gg T$, то $\gamma \rightarrow 1$. В общем случае, конечно, такая $\gamma = \gamma(T)$, но эта зависимость слаба, и в области многократной ионизации плазму в расчетах обычно считают идеальным газом с

$$\gamma = 1,2 \div 1,3$$

Поняв, что из себя представляет плазма, можно переходить к разбору того, что она делает с излучением. Вычислению ее излучательно-поглощательных характеристик (а заодно и обоснованию использованных в начале части оценок сечений взаимодействия фотонов с электронами в реакции (2.3)) в различных режимах и обстоятельствах посвящено несколько следующих лекций. В заключение же данной коротко проанализируем практически нерассматриваемый (но упоминаемый) в данном курсе процесс томсоновского рассеяния на свободных электронах. Применяя формулу (2.20) к этому случаю, можно записать, что приобретаемая заряженной частицей в поле электромагнитной волны скорость и, соответственно, переизлучаемая ею энергия равны

$$v \sim \frac{eE}{m\omega}, \quad \dot{\mathcal{E}} \sim \omega^2 \frac{e^2}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{e^4}{m^2 c^4} \cdot \underbrace{cE^2}_{S_E},$$

следовательно, сечение рассеяния действительно имеет порядок

$$\sigma_s \sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = r_0^2. \quad (2.24)$$

Отсюда же следует и вывод о том, что этот процесс на неподвижном электроне происходит без изменения частоты. Напомним, что эффекты Комптона и Доплера (которые по большому счету есть следствия одного закона сохранения) меняют ситуацию, так что на самом деле энергообмен (в сторону установления равновесия) излучения с веществом идет и за счет рассеяния.

Отходя несколько в сторону от затрагиваемых здесь вопросов, следует подчеркнуть, что использование языка σ_s для описания ансамбля многих электронов (рассеивающей среды) означает суммирование интенсивностей переизлучаемых волн от отдельных рассеивателей. Возможен, однако, и когерентный режим, когда разнесенные на \mathbf{r} электроны рождают сфазированные волны при $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r} < 1$ с суммирующимися амплитудами. При малых углах рассеяния θ переход в новое качество происходит при $n^{1/3} > \theta/\lambda$. Это «интерференционное» качество описывается диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ и называется преломлением: кванты всем строем согласованно меняют свою фазовую скорость, а в случае неоднородности среды ($\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$) — и направление своего движения. На этом принципе, например, работает рентгеновский волновод из полого стеклянного капилляра (в этой области частот как раз справедливо выписанное плазменное выражение для ε , и обычная материя менее плотна, чем вакуум).

ЗАДАЧИ

1. Оценить с помощью формулы (2.19) темп ионизации иона $z - 1$ плазменными электронами, распределенными по Максвеллу

$$f_M(\mathbf{v}) = \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right)}{(2\pi v_{Te})^{3/2}} \left(v_{Te} = \sqrt{\frac{T}{m}}\right).$$

Решение. Ионизация связана с сообщением связанным электронам энергии $\Delta\mathcal{E} \geq J_{z-1}$, и потому скорость процесса равна

$$z_e n \int \sigma_{ex}(mv^2, J_{z-1}) v f_M(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v},$$

где z_e — число электронов на ионизуемой оболочке. Используя выражение для сечения и переходя к интегрированию в сферической скоростной системе координат, можно записать

$$\begin{aligned} z_e n \langle \sigma_{ex} v \rangle &\sim z_e n \int_{\sqrt{2J_{z-1}/m}}^{\infty} \frac{e^4}{mv^2 J_{z-1}} v \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right)}{v_{Te}^3} v^2 dv = \\ &= z_e n v_{Te} \frac{e^4}{J_{z-1} T} \exp\left(-\frac{J_{z-1}}{T}\right). \end{aligned}$$

2. Какова интенсивность излучения электрона, связанная с переворотом его спина в магнитном поле?

Решение. С точки зрения классической (и квантовой тоже) физики воздействие магнитного поля на собственный магнитный момент электрона приводит к прецессии его механического момента

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = [\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}], \quad \boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{mc} \mathbf{s} = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Поскольку вследствие квантовой специфики «угол» между $\boldsymbol{\mu}$ и \mathbf{B} не мал, то осцилляции спина не малы тоже и происходят с частотой $\sim \omega_{Be}$, т. е. переменная составляющая магнитного поля в волновой зоне $\tilde{B} \sim \mu/\lambda^3$, $\lambda \sim c/\omega_{Be}$. Следовательно, темп потерь на магнито-дипольное излучение можно оценить как

$$\dot{\mathcal{E}} \sim c \tilde{B}^2 \lambda^2 \sim \frac{\omega_{Be}^4 \mu^2}{c^3}$$

(ср. (2.20)).

ЛЕКЦИЯ 6

Тормозное излучение, стандартный вывод. Отличия в физике при малых и больших частотах. Суммарная интенсивность излучения и пробеги. Макроскопический подход к задаче. Связь процессов рассеяния электронов с излучением.

Данная лекция начинает подробный анализ излучательных характеристик термодинамически равновесной плазмы. В ней рассматривается взаимодействие фотонов с электронами при свободно-свободных переходах последних или так называемое тормозное излучение, доминирующее в случае полной обдирки ионного компонента (см. следующие лекции). Полученные формулы послужат основой при изучении других процессов, поэтому вывод осуществляется с нескольких позиций, и ответы разбираются с нескольких сторон.

В соответствии с исходными заявлениями, используемая метода действий — классическое описание с квантовыми ограничениями. Считается, что излучение дает лишь малые поправки к движению (из-за слабости взаимодействия $e - \gamma$) и в динамической задаче можно пренебречь перемещением ионов ($v_e \gg v_i$). Пролет свободного электрона в кулоновском поле иона происходит по гиперболической траектории, и его энергопотери в указанных приближениях легко вычисляются с помощью (2.20) интегрированием известной (вычисленной из кеплеровской задачи) функции $\mathbf{v}(t)$ (рис. 2.14). Для определения общей интенсивности излучения из единицы объема (см. лекцию 3) эти потери следует просуммировать по всем находящимся

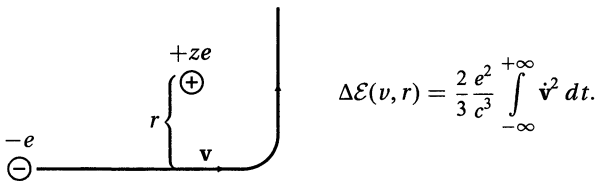


Рис. 2.14. К выводу тормозного излучения

здесь максвелловским электронам с учетом их частоты столкновений с ионами, обладающими одним зарядом z (тривиальное обобщение на нетривиальные ионные спектры будет дано ниже):

$$q = n \int_0^{\infty} \left(v n_z \int_0^{\infty} \Delta\mathcal{E} \cdot 2\pi r dr \right) f_M(\mathbf{v}) 4\pi v^2 dv. \quad (2.25)$$

Таковы точные формулы. Манипуляции с ними начнем с простейших качественных прикидок.

1. Грубый подход. Сконцентрируемся сначала на генерации электромагнитных волн одним электроном, обладающим скоростью v , сталкивающимся с подворачивающимися ему по дороге ионами, т. е. на заключенной в скобки внутренней части (2.25). Если оценить $\Delta\mathcal{E}$ из рис. 2.14 по порядку величины через эффективное время взаимодействия Δt как

$$\Delta\mathcal{E} \sim \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \Delta t, \quad \left(\dot{v} \sim \frac{ze^2}{mr^2}, \quad \Delta t \sim \frac{r}{v} \right)$$

и, посчитав, что излучаемая частота однозначно связана с прицельным расстоянием по закону $\omega \sim v/r$ (т. е. $\omega \sim 1/\Delta t$, см., впрочем, далее), перейти от интегрирования по r к интегрированию по ω ($d\omega = -v/r^2 \cdot dr$), то спектр тормозных потерь этого электрона запишется в виде

$$q_\omega^e d\omega \sim n_z \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3 v} d\omega. \quad (2.26)$$

Нетрудно, однако, заметить, что получающийся $\int d\omega$ расходится на больших частотах или малых r . Вот и наступил (неизбежный) критический момент, когда жизнь заставляет отказаться от классики. Считается, что постоянный спектр из (2.26) на самом деле занимает область лишь $\omega \leq mv^2/(2\hbar)$, т. е. полная интенсивность «одноэлектронного» тормозного излучения

$$q^e \sim n_i \frac{z^2 e^6 v}{mc^3 \hbar}.$$

Этому обрезанию можно дать двойное объяснение. Во-первых, если $\hbar\omega > mv^2/2$, то излучение сопровождается переходом пролетающего электрона в связанное состояние, а это уже другой, фоторекомбинационный процесс, подлежащий исключению из данного рассмотрения. Во-вторых, из-за квантово-волновой «размазки» электрона на самом деле «различимы» лишь пролеты с $r > r_{\min} \sim \lambda_e$, т. е. с $mv^2/\hbar > v/r$.

Уже упомянутая ранее малость постоянной тонкой структуры (огромность кванта действия \hbar в электромагнитных процессах), как это обычно и бывает, приводит к тому, что попытки устранить расходимость, оставаясь в классической области, за счет энергетического обрезания $\Delta\mathcal{E} \leq mv^2/2$ дают преуменьшенное в 137 раз (при $z = 1$) значение r_{\min} и, соответственно, преувеличенное q^e . Реальность формируют квантовые эффекты, повышающие (как и утверждалось в предыдущей лекции) слабость взаимодействия зарядов с фотонами.

Остающееся суммирование по всем максвелловским электронам в единице объема плазмы с качественной точки зрения сводится к умно-

жению полученной формулы на n и замены в ней $v \rightarrow \sqrt{T/m}$. Окончательно интенсивность (точнее, ее плотность) тормозных потерь представима в виде

$$q_T \sim nn_i \frac{z^2 e^6 \sqrt{T}}{m^{3/2} c^3 \hbar}.$$

Выписанные соотношения абсолютно правильно описывают ситуацию на желательном нам буквенном уровне, но истинная физика явления в грубых прикидках оказывается затушеванной. Чтобы проникнуть в важные тонкости, следует провести более тщательный анализ.

2. Анализ предельных случаев. Очевидно, что в действительности процесс излучения идет по-разному при малых и больших частотах, поскольку вид (кривизна) траекторий электрона в этих вариантах весьма различны. Граница между режимами определяется существенностью силового воздействия на пролетающую частицу:

$$mv^2 \sim \frac{ze^2}{\hat{r}} \rightarrow \hat{r} = \frac{ze^2}{mv^2}, \quad \hat{\omega} = \frac{mv^3}{ze^2}.$$

Волны малой частоты $\omega \ll \hat{\omega}$ рождаются при почти прямолинейном движении на прицельных расстояниях $r \gg \hat{r}$. Здесь надо вспомнить, что частотная зависимость излучения на самом деле определяется отнюдь не из оценки $\omega \sim v/r$ в интеграле по r , а из фурье-разложения \dot{v} и строгой теоремы Парсевалья для интеграла по t :

$$\int \dot{v}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |\dot{v}_\omega|^2 d\omega.$$

Использованный в первом подходе метод оперирования с (2.25) соответствует предположению, что $\dot{v}_\omega \propto \delta(\omega - v/r)$, тогда как согласно простейшей теории интегралов фурье-спектр ускорения не сосредоточен у v/r , а, действительно становясь здесь заметным, занимает, оставаясь примерно на одном уровне, весь диапазон частот $|\omega| < v/r$

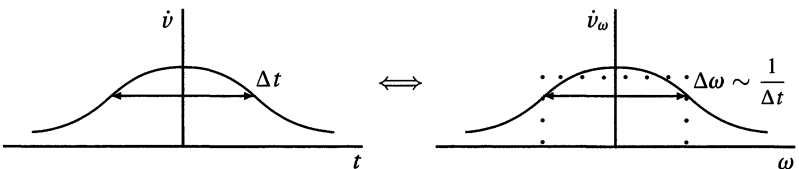


Рис. 2.15. Взаимность (принцип неопределенности) контуров функций в обычном и фурье-пространстве

(рис. 2.15). Иными словами, в излучение данной частоты ω вносят вклад все пролеты с прицельными расстояниями $r < v/\omega$. Поэтому

физически и математически более адекватно использовать в оценках представление $|\dot{v}_\omega|^2$ в виде ступенчатой θ -, а не импульсной δ -функции (см. опять-таки «спрямленный» пунктирный график на рис. 2.15 справа). Ее амплитуда может быть найдена из

$$\dot{v}_\omega(0) \equiv \int \dot{v} dt \sim \dot{v} \Delta t \sim \frac{ze^2}{mrv}.$$

Тогда для спектральных потерь одного электрона при столкновении с одним же ионом следует формула

$$\Delta \mathcal{E}_\omega(v, r) d\omega \sim \frac{e^2 |\dot{v}_\omega|^2}{c^3} d\omega \sim \theta \left(\frac{v}{r} - \omega \right) \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3 v^2 r^2} d\omega,$$

и, следовательно, мягкий участок его полного спектра представляет собой (ср. (2.26))

$$q_\omega^e \equiv n_z v \int_0^\infty 2\pi r \Delta \mathcal{E}_\omega dr \sim n_z \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3 v} \int_{\hat{r}}^{v/\omega} \frac{dr}{r} \propto \ln \frac{\hat{\omega}}{\omega}$$

(на нижнем пределе по r нарушается выбранное приближение «прямолинейности»), т. е. в нем появляется (интегрируемый) логарифмический множитель.

Но наиболее важен для интересной нам энергетики противоположный случай больших частот квантов $\omega \gg \hat{\omega}$. Они излучаются на сильно искривленных траекториях, проходящих в «периферии» от иона на дистанциях $r_{\text{пц}}$, куда меньших исходного прицельного $r \ll \hat{r}$, поэтому использованные в грубых оценках характеристики движения электрона неадекватны его реальной динамике. Правильные значения расстояния и намного увеличивающейся скорости движения при максимальном сближении частиц можно найти из законов сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} - \frac{ze^2}{r_{\text{пц}}} \approx 0, \quad mvr = mv_{\text{max}} r_{\text{пц}}$$

(при $r_{\text{пц}} \ll r$ $v_{\text{max}} \gg v$). Отсюда следует, что указанные величины, а также скорость вращения электрона по орбите в момент рождения предельно жесткого излучения есть

$$r_{\text{пц}} \approx \frac{r^2}{2\hat{r}} \ll r, \hat{r}, \quad v_{\text{max}} \approx 2v \frac{\hat{r}}{r} \gg v, \quad \omega_{\text{вр}} \approx \frac{v_{\text{max}}}{r_{\text{пц}}} = 4 \left(\frac{\hat{r}}{r} \right)^3 \hat{\omega} \gg \hat{\omega}.$$

Именно эти параметры следует подставлять в оценки ускорения \dot{v} , времени взаимодействия Δt и излучаемой частоты ω . Ответ, правда,

несколько парадоксальным образом совпадает с (2.26), поскольку

$$\Delta \mathcal{E} v r dr \sim \frac{e^2}{c^3} \frac{z^2 e^4}{m^2 r_{\text{пц}}^4} \frac{r_{\text{пц}}}{v_{\text{max}}} v r dr \sim \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3 v} \frac{v_{\text{max}}}{r_{\text{пц}}^2} dr_{\text{пц}} \sim \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3 v} d\omega.$$

Однако только проделанный анализ позволяет снять внутреннюю противоречивость оценок по первому методу. Например, становится понятным, почему в этой задаче все-таки можно пренебрегать влиянием излучения на движение, несмотря на рождение квантов с $\hbar\omega$, вполне сравнимой с энергией свободных электронов. Причина заключается в том, что в области его генерации выполняется «правильное» сильное неравенство на кинэнергию излучающей частицы $mv_{\text{max}}^2 \gg \hbar\omega$, и потому этот процесс действительно вносит лишь малую поправку. Одновременно удается понять и неизбежность квантового обрезания в классической по виду задаче (движение свободных электронов в плазме практически всегда можно описывать на классическом языке). Тут все дело в том, что ней возможны и доминируют в излучении сколь угодно близкие к иону пролеты. Электроны неизбежно загоняют себя в область $\sim \lambda_e$. В результате в ответе и имеем $q \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \infty$, т. е. существенную и неустранимую квантовость. В случае столкновения одноименно заряженных (но, естественно, разных) частиц, например, тех же электронов с отрицательными ионами это не так, хотя полученные формулы типа (2.26) формально не зависят от знака z . В этом варианте интенсивность по понятной причине обрезается еще в классической области $\omega \sim \hat{\omega}$ (см. ниже).

Но на чем все же зиждется уверенность в адекватности классического «траекторного» подхода? Обоснование методу можно дать исходя из стандартного условия квазиклассичности движения в кулоновом поле

$$\frac{ze^2}{\hbar v} \gg 1.$$

Оно следует из простой, восходящей еще к Бору оценки малости «дробового» квантового эффекта для момента импульса $mvr \gg \hbar$ вкуче с существенностью воздействия рассеивающего центра на движение $mv^2 \sim ze^2/r$. В данной тематике это неравенство замечательным образом совпадает с требованием жесткости излучения

$$\omega_{\text{max}} \sim \frac{mv^2}{\hbar} \gg \hat{\omega},$$

и его можно переписать в виде условия на ионизационное равновесие

$$\frac{mv^2}{2} \sim T \ll \frac{z^2 e^4 m}{\hbar^2} \sim z^2 \text{Ry} \sim J_{z-1}.$$

Остается вспомнить, что вследствие специально подчеркиваемой ранее подавленности рекомбинационных процессов в плазме обычно это неравенство выполняется.

Разобравшись в важных тонкостях, можно продолжить изучение и относительно строгий вывод характеристик тормозного излучения. Итак, основной вклад в энергетику дают потери в жесткой области $\omega > \hat{\omega}$, в которой амплитуда индивидуального спектра постоянна и равна (2.26), а «квантовое» обрезание сводится к домножению его на $\theta(mv^2/2 - \hbar\omega)$. В результате оставшееся усреднение по максвелловской функции распределения (суммирование по всем электронам)

$$q_{\omega T} \equiv \int_{4\pi\circ} j_{\omega} d^2\mathbf{n} \sim nn_z \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3} \int_0^{\infty} \theta\left(\frac{mv^2}{2} - \hbar\omega\right) \frac{f_M(\mathbf{v})}{v} 4\pi v^2 dv$$

приводит к экспоненциальности спектра тормозного излучения из равновесной плазмы

$$q_{\omega T} \propto \int_{\sqrt{2\hbar\omega/m}}^{\infty} \frac{v \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)}{v_{Te}^3} dv \propto \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)}{\sqrt{T}}. \quad (2.27)$$

Видно (и важно для некоторых приложений), что по сравнению с планковским распределением здесь доминируют мягкие кванты ($\langle \hbar\omega \rangle = T$), а ведь это, повторим, наиболее «термодинамичный» из всех процессов излучения, поскольку обусловлен идеальным «термостатом» — свободными электронами.

С помощью (2.27) определяется и такая важная транспортная характеристика, входящая в (2.6), как длина пробега квантов, подправленная на процессы индуцированного испускания

$$l'_{\omega} = \frac{cU_{\omega b}}{q_{\omega}} \propto \frac{\sqrt{T}}{nn_z z^2} \frac{\omega^3}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)}, \quad (2.28)$$

необходимая для вычисления росселандова пробега l . Как и указывалось в лекции 3, коэффициент поглощения $1/l'_{\omega}$ при свободно-свободных переходах является монотонно убывающей функцией частоты, зависящей лишь от термодинамических характеристик плазмы (концентраций компонентов и температуры).

Точные квантово-механические расчеты весьма незначительно меняют выписанные результаты и соотношения, хотя, разумеется, в отсутствии таких расчетов многие высказанные здесь соображения смот-

релись бы не так уж и убедительно. Вычисленные на их основе практические формулы для, как мы уже знаем, основных излучательных характеристик в двух предельных режимах транспорта квантов имеют вид (относительно используемых единиц измерения см. первую лекцию)

$$q_{\tau} \approx 1,5 \cdot 10^{-32} n n_z z^2 T^{1/2}$$

для интенсивности объемного излучения и

$$L_{\tau} \approx 8,1 \cdot 10^{38} \frac{T^{7/2}}{n n_z z^2}$$

для росселанда. В случае наличия в плазме нескольких сортов ионов в них происходит очевидная замена $n_z z^2 \rightarrow \sum n_z z^2$. Пробег l , определяемый тормозными процессами, численно совпадает с пробегом квантов l'_{ω} при $\hbar\omega \sim 5,8 T$, а l' — при $1,7 T$. Последний меньше l в 30 раз, хотя, подчеркнем еще раз, это максимально «хороший» спектр (в (2.27), как и у планковского, нет других масштабов, кроме температуры) — это одно из проявлений его мягкости. Даже в, казалось бы, оптимальной ситуации приближение «серого» вещества требует осторожности!

Важно опять-таки понимать (см. конец прошлой лекции), что используемые методы суммирования в (2.25) очевидно основаны на складывании интенсивностей излучения отдельных электронов на отдельных ионах, т.е. пренебрегают возможной сфазированностью порождаемых в разных местах в разное время волн. На самом деле и в разбираемом круге явлений возможны интерференционные когерентные эффекты, как временные, так и пространственные. Например, в предельно мягкой области спектра, когда частота излучения становится меньше частоты последовательных столкновений электрона с ионами (т.е. при $\omega < \nu_{ei}$), интенсивность процесса резко падает, рождающиеся на ионах «парциальные» волны оказываются антикоррелированы между собой и «гасят» друг друга. Можно сказать, что за время между последовательными рассеяниями на ионах «успевает» сформироваться лишь доля ω/ν_{ei} от потенциально возможной амплитуды волны (последующее столкновение выводит излучающий электрон из резонанса с порождаемой им волной), поэтому ее интенсивность подавлена в $(\omega/\nu_{ei})^2$ раз (см. также далее). С другой стороны, в случае хорошей фазировки излучателя-электрона с квантами последовательно рождаемые им волны могут складываться когерентно. Особенно силен этот эффект при релятивистских энергиях, когда

электрон летит почти прямолинейно, мало отклоняясь при рассеянии и светит в лабораторной системе координат как «прожектор» в узком телесном угле $\sim \gamma^{-2}$, определяемом его лоренц-фактором. Одновременно этот электрон очень медленно отстает от такого порожденного им излучения, и, встречаясь с новым ионом, создает новое почти в той же фазе. В результате все, сгенерированное на *длине формирования* $\sim \lambda \gamma^2 \gg \lambda$, складывается поамплитудно, что приводит к сильнейшему по сравнению с выписанными здесь формулами увеличению излучения ультрарелятивистских электронах в твердых телах (с малым расстоянием между рассеивателями) в так называемом когерентном тормозном излучении. В последующих лекциях мы больше не будем обсуждать проблемы когерентности, но следует помнить, что в волновых процессах интерференция всегда возможна.

Рабочие формулы получены и осознаны, но в виду особой важности темы (упомянутой в начале лекции актуальности ее для анализа других процессов в последующих лекциях), стоит взглянуть на явление еще с одной, совершенно отличной стороны.

3. Макроскопический подход. Хорошо известно, что распространение электромагнитных волн в плазме описывается диэлектрической проницаемостью (которая, напомним, является проявлением когерентного томсоновского рассеяния на плазменных электронах)

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_{ei})}.$$

Наличие электрон-ионных столкновений приводит к слабому затуханию этих волн вследствие джоулевой диссипации. В результате из выписанного дисперсионного соотношения следует появление у излучения с фиксированной частотой ω малой мнимой добавки к волновому вектору $k = k' + ik''$, $\Im k = k'' \ll k' = \Re k$. Подчеркнем еще раз (см. лекцию 2), что этот коэффициент затухания в обязательном порядке учитывает поправки к поглощению, связанные с индуцированным излучением, ибо с макроскопической точки зрения эти эффекты неразделимы.

Его нетрудно вычислить, особенно при учете обычных неравенств $\omega \gg \omega_{pe}, \nu_e$ (ср. с первой лекцией):

$$k' c \approx \omega, \quad \frac{2k' k'' c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_{pe}^2 \nu_{ei}}{\omega^2 \omega},$$

после чего пойти в обратном (относительно использованного ранее) направлении. Найденную длину пробега $1/k''$ для теплового кванта $\omega = T/\hbar$ можно подставить в знакомый термодинамический баланс

поглощения–излучения $q_T \sim ck''U_b$, и, учитывая, что $U_b \sim T/\lambda_{\gamma T}^3$, вывести замечательную простую связь тормозного излучения с энергетикой столкновений

$$q_T \sim nT v_{ei} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T}{mc^2}. \quad (2.29)$$

Она соответствует тому, что электроны теряют при рассеянии на ионах свою тепловую энергию в меру квантовой и релятивистской малости взаимодействия $e - \gamma$. Правда, в отличие от формул для чисто электронных транспортных процессов (сопротивления, теплопроводности и пр.), здесь входящий в v_{ei} кулоновский логарифм (составляющий в обсуждаемой области «классичности» $e - i$ соударений $\Lambda \sim \ln(N_D/z)$) следует заменить на множитель ~ 1 — из-за того, что частота процесса $\omega \gg \omega_{pe}$, дебаевское облако не успевает сформироваться и «мягкие» столкновения, доминирующие в Λ раз в рассеянии, не дают большого вклада в излучение.

Любопытно автоматическое выпадение из тормозных потерь чисто межэлектронных столкновений, как уже указывалось, по микроскопическим причинам не способных задействовать дипольный механизм излучения — в макрокопике к конечному сопротивлению приводит лишь обмен импульсами между двумя компонентам, см. (1.10), (1.14). Не менее автоматически получается и подавленность излучения в области $\omega \ll v_{ei}$, следует лишь изменить способ разложения при определении k'' с учетом нового малого параметра. Правильные формулы бывают «умнее» выписывающих их исследователей в том смысле, что содержат в себе эффекты, до времени не приходящие в голову использующим их физикам. Впрочем, очевидно, что вывести правильную формулу удастся лишь при не противоречащем ей уме автора.

В заключение лекции укажем также полезную формулу для связи сечений микроскопических процессов любого рассеяния (например, на нейтральном атоме) электронов с производимого при этом ими дипольного излучения за счет вызванного столкновением ускорения — исходя из двойственной записи энергопотерь согласно элементарному соотношению (2.20) можно получить

$$\frac{e^2}{c^3} v^2 \omega^2 \sigma_s \frac{1}{\omega} \sim \hbar \omega \sigma_r \quad \rightarrow \quad \sigma_r \sim \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sigma_s$$

(ср. с грубыми оценками и (2.29)). При ее использовании следует иметь в виду, что ω в ней сокращается и подлежит дополнительно определению, будучи зависимой от «внутренних» деталей столкновения.

ЗАДАЧИ

1. Насколько эффективно может охлаждать плазму свободно выходящее из нее тормозное излучение?

Решение. Поскольку интенсивность такого излучения растет с увеличением температуры при заданном z медленнее, чем по линейному закону, то его относительный (нормированный на энергосодержание среды) темп убывает с ростом T (при неизменных концентрациях и заряде ионов). И наоборот, при малых температурах оно настолько удельно велико, что способно полностью охладить плазму за конечное время даже в режиме $n = \text{const}$ (см. лекцию 4). Действительно, в этом случае

$$c_V \dot{T} \propto T^{1/2} \rightarrow T \propto (t_0 - t)^2 \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

И уж тем более быстро процесс идет в режиме $P = nT = \text{const}$, когда

$$c_P \dot{T} \propto T^{-1/2} \rightarrow T \propto (t_0 - t)^{2/3}.$$

Естественно, в реальности при малых T излучение запирается ($l'_T < a$), и темп охлаждения резко падает.

2. Согласно (2.27) в тормозных потерях рождаются кванты со спектром, хорошо соответствующим энергетическому распределению свободных электронов. Это делает уместным вопрос о соотношении длин пробега столь разных, но равно важных в данном круге задач «тепловых» ($mv^2 \sim \hbar\omega \sim T$) плазменных частиц — электрона ℓ_{eT} относительно рассеяния на ионах n_z и фотона $\ell_{\gamma T} \sim l'_{T/\hbar}$ относительно обратнотормозного поглощения с участием тех же ионов.

Решение. Удерживая в (2.28) все буквенные коэффициенты, нетрудно увидеть, что

$$\frac{\ell_{\gamma T}}{\ell_{eT}} \sim \Lambda \left(n \lambda_{eT}^3 \frac{e^2}{\hbar c} \right)^{-1}$$

с уже знакомыми (и встречающимися далее) физическими параметрами.

3. Излучение при столкновениях электронов между собой действительно сильно подавлено вследствие отсутствия ускорения их центра масс, совпадающего с центром зарядов, однако остающийся квадрупольный канал мал, но конечен. Как он проявляется в макроскопическом гидродинамическом описании?

Решение. Естественным механизмом затухания электромагнитных волн в плазме, связанным с межэлектронными столкновениями, является электронная вязкость, входящая в виде $\eta_e k^2$ в дисперсионное уравнение аддитивно с ν_{ei} . Соответственно, искомое квадрупольное излучение пропорционально вызываемому этим процессом $\Im k$. Для его оценки надо иметь в виду две тонкости. Во-первых, использование здесь привычного (и справедливого в сильностолкновительном случае) соотношения $\eta_e \sim \nu_{ee} \ell_{ee}^2$, где $\ell_{ee} \sim \nu_{Te} / \nu_{ee}$ приведет к парадоксальной обратнопропор-

циональной зависимости интенсивности излучения от частоты электрон-электронных столкновений (что связано, как известно, с эффектами антикорреляции излучаемых волн). На самом деле в слабостолкновительном пределе (не реализующемся в обычной гидродинамике вследствие отсутствия «коллективности» движения в таком режиме — см. лекцию 1 в первой части) $v_{ee} \ll \omega$ коэффициент вязкости равен $\sim v_{ee}(v_{Te}/\omega)^2$. Во-вторых, характерные частоты излучения из-за одноименности зарядов сталкивающихся частиц $\omega \sim \hat{\omega} = mv^3/e^2 \ll mv^2/\hbar$ находятся в мягкой рэлей-джинсовской области спектра, поэтому интенсивность излучения из единицы объема следует определять из баланса

$$q_{ee} \sim ck'' \frac{T\hat{\omega}^3}{c^3}$$

($q_{\omega} = cU_{\omega b}/l'_{\omega} \rightarrow 0$ при $\omega > \hat{\omega}$). Окончательно,

$$q_{ee} \sim nT\nu_{ee} \left(\frac{T}{mc^2} \right)^{5/2}$$

(при тех же оговорках относительно Λ). Полезно проанализировать причины, породившие столь многочисленные релятивистские малости, исходя из микроскопической картины явления.

ЛЕКЦИЯ 7

Фоторекомбинационное излучение νS тормозного. Сечение фотоэффекта. Значения и различия l и l' . Малые параметры фоторекомбинации и корональное равновесие. Роль диэлектронной рекомбинации.

В этой лекции рассматриваем взаимодействие фотонов с электронами при свободно-связанных переходах или фоторекомбинационное излучение вкпе с фотоэффектом. Если вспомнить подробный анализ тормозных потерь, то окажется, что практически вся предварительная работа уже проделана там. Остается лишь осознать это и записать почти готовые формулы. Все дело в том, что пролетающий мимо иона электрон основные потери своей энергии (малые в сравнении с «текущим» $mv_{\max}^2/2$) несет при чрезвычайно сильном сближении с притягивающим центром, а «понимает» новое положение (излучил ли он больше или меньше исходного запаса, с которым начинал сближение с ионом) гораздо позднее, уже удалившись на значительную дистанцию и уменьшив кинэнергию до того уровня, чтобы «почувствовать» потерю (рис. 2.16). Эту специфику особенно подчеркивает

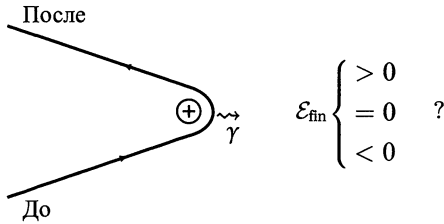


Рис. 2.16. Излучение при близких пролетах

в своих работах В. И. Коган — в момент рождения γ -кванта частица еще не знает, выпишет ли она гиперболу, параболу или эллипс. В результате мы имеем дело с единым процессом излучения, поэтому в теории к уже найденному непрерывному спектру одиночного электрона (2.26) добавляется дискретная часть, связанная с переходами на всевозможные уровни от континуума до основного (и определяемая энергиями ионизации этих уровней), причем при том же множителе:

$$q_{\omega}^e \sim \frac{z^2 e^6 n_z}{m^2 c^3 v} \left[\theta \left(\frac{mv^2}{2} - \hbar\omega \right) + \sum_k J_k \delta \left(\frac{mv^2}{2} + J_k - \hbar\omega \right) \right]. \quad (2.30)$$

Дальнейшее суммирование по всем электронам, по-прежнему считающимися распределенными по Максвеллу, приводит к односторонней «размазке» дискретных пиков (поскольку их местоположение

$\omega = (J_k + mv^2/2)/\hbar$, а $v^2 \geq 0$, то в зависимости от v они смещаются только в одну сторону), порождающей очень характерный «пилообразный» спектр, схематически изображенный на рис. 2.17. Эту же

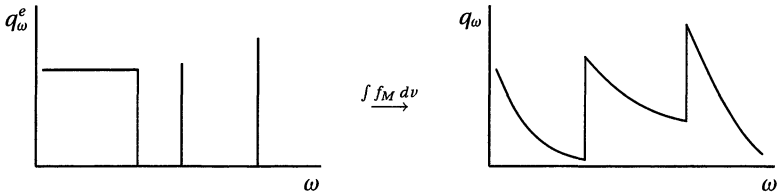


Рис. 2.17. Спектры рекомбинационного излучения одиночного электрона и максвелловского ансамбля

яркую особенность имеет и коэффициент поглощения излучения за счет фотоэффекта на различных уровнях — о чем уже упоминалось в лекции 3 — поскольку отличается от q_{ω} , как известно, лишь гладко зависящим от частоты множителем U_{ob} . Как только энергии квантов начинает хватать для ионизации с очередного электронного уровня, сечение поглощения скачкообразно возрастает с последующим относительно медленным спадом, см. далее.

Таким образом, в формуле для общей интенсивности потерь из единицы объема следует всего лишь учесть добавочную энергию. Для ее оценки надо принять во внимание, что излучение при рекомбинации на достаточно высокий уровень с главным квантовым числом $\hat{n} \gg 1$ с хорошей точностью удовлетворяет соотношению

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2} + J, \quad J = \frac{z^2 Ry}{\hat{n}^2}.$$

Для суммарного эффекта нужно взять $\sum_{\hat{n}}$. Конечно, на основном уровне, дающем главный энергетический вклад, движение не квазиклассично и траекторный подход не слишком адекватен, да и ридберговская аппроксимация в общем случае работает плохо (влияние уже существующей электронной оболочки в случае рекомбинации не на голое ядро — т. е. при $z < z_n$ — не мало), но грубая оценка

$$q_{\text{фр}} \sim q_{\text{т}} \frac{z^2 Ry}{T}$$

вполне надежна и хороша. Микроскопический анализ можно сравнить с макроскопической универсальной формулой (2.29):

$$q_{\text{фр}} \sim n J_{z-1} v_{ei} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T}{mc^2} \quad (2.31)$$

(с теми же оговорками относительно v_{ei}).

Детальный квантово-механический строгий вывод с учетом указанных тонкостей полностью подтверждает эти простейшие оценки:

$$q_{\text{фр}} \approx 5 \cdot 10^{-31} \frac{nn_z z^4}{T^{1/2}}$$

с очевидным обобщением $n_z z^4 \rightarrow \sum n_z z^4$ на плазму сложного состава. Истинное отношение фоторекомбинационного излучения к тормозному составляет $\sim 32z^2/T$.

Интересна зависимость суммарных потерь $q_{\text{фр}} + q_{\text{т}}$ от температуры, схематически изображенная на рис. 2.18. Поскольку смена доминирующего канала излучения, порождаемого свободными электронами, хорошо коррелирует с появлением оболочек у голых ядер (ср.

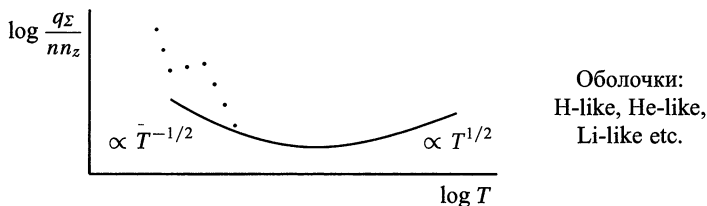


Рис. 2.18. Зависимость интенсивности объемного излучения от температуры

с ионизационным равновесием), то на самом деле рост фоторекомбинационного излучения при уменьшении T очень быстро перекрывается показанным пунктиром линейчатым излучением связанных электронов данного иона. Их вклад немонотонен, чувствуется так называемая оболочечная структура (скажем, гелиевоподобный ион светит хуже водородоподобного), но начиная с литиевой конфигурации на порядки превосходит $q_{\text{фр}}$ — естественно, лишь при свободном выходе квантов. Тем не менее, для оценок непрерывного спектра вполне годятся найденные формулы с $z = z(T)$, и ридберговская аппроксимация для основного уровня здесь не так уж плоха. В случае применимости аппроксимации $z = \sqrt{T}$ скейлинги тормозных и фоторекомбинационных потерь вообще совпадают, но последние в 30 раз больше.

Из выписанных формул для $q_{\text{фр}}$ и $q_{\text{т}}$ очевидно, что длина пробега относительно запираания в новом процессе

$$l'_{\text{фр}} \approx l'_{\text{т}} \frac{T}{J_{z-1}},$$

что связано с тем обстоятельством, что в излучение по фоторекомбинационному каналу основной вклад вносят предельно жесткие кванты с энергией $\hbar\omega \sim J_{z-1}$. Важно, что в росселанде этого фактора уже нет,

поскольку в него дают вклад относительно мягкие кванты с $\hbar\omega \sim 4T$ (см. лекцию 3), вызывающие фотоэффект с достаточно высоких, возбужденных уровней ионов. Для точного вычисления l нужно знать частотную зависимость излучения и сечение фотоэффекта. На потребном нам уровне их определение — простая, но довольно громоздкая операция, основанная (так регулярно действуют и в строгой теории) не на непосредственном расчете, а на балансе этого микроскопического процесса с обратным.

Спектральная интенсивность излучения при рекомбинации на заданный уровень \hat{n} в максвелловской плазме находится простым усреднением соответствующего пика J из (2.30) (ср. (2.27)):

$$q_{\omega\hat{n}} \sim nn_z \frac{z^2 e^6}{m^2 c^3} J \int_0^\infty \frac{\delta\left(\hbar\omega - \frac{mv^2}{2} - J\right)}{v} \frac{\exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)}{v_{Te}^3} 4\pi v^2 dv,$$

откуда получается, что один (каждый со своим J) зубец «пилы» на рис. 2.17 имеет вид

$$q_{\omega\hat{n}} \sim nn_z \frac{z^2 e^6 J}{(mv_{Te})^3 c^3} \theta(\hbar\omega - J) \exp\left(-\frac{\hbar\omega - J}{T}\right). \quad (2.32)$$

При термодинамическом равновесии это излучение связано с фотоионизацией согласно детальному балансу (2.10) (фактически, (2.5))

$$q_{\omega\hat{n}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} c\sigma_{\text{ph}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right] n_{z-1}^*,$$

где использовано планковское выражение для $U_{\omega b}$ и принята во внимание поправка на индуцированное испускание (см. лекцию 2) в виде соответствующего множителя перед искомым сечением фотоэффекта на возбужденных ионах n_{z-1}^* . Если учесть, что заселенность этого состояния \hat{n} в такой равновесной плазме определяется формулой Больцмана, а концентрация n_{z-1} — формулой Саха

$$\frac{n_{z-1}^*}{n_{z-1}} \sim \exp\left(-\frac{J_{z-1} - J}{T}\right), \quad \frac{nn_z}{n_{z-1}} \sim \left(\frac{\sqrt{mT}}{\hbar}\right)^3 \exp\left(-\frac{J_{z-1}}{T}\right),$$

то все n_α и экспоненты благополучно сокращаются, давая на выходе весьма наглядное соотношение

$$\sigma_{\text{ph}} \sim \frac{z^2 e^4}{J^2} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{J}{\hbar\omega}\right)^3 \theta(\hbar\omega - J). \quad (2.33)$$

В максимуме при $\hbar\omega = J$ это действительно уменьшенная в ~ 137 раз «площадь» иона, поскольку ze^2/J имеет порядок радиуса «орбиты» ионизуемого связанного электрона. После резкого «включения» поглощения на красной границе фотоэффекта следует степенной спад сечения, связанный с ослаблением взаимодействия при расхождении энергий его агентов.

Любопытно, что другой — релятивистский — малый фактор во взаимодействии $e - \gamma$, имеющий здесь порядок $(v/c)^3$ (лишняя степень возникла из-за вхождения в кинетику (σv)) оказался в балансе скомпенсированным разницей в объемах фазовых ячеек $(\hbar k)^3$ и $(mv_{Te})^3$, приходящихся на реагирующие частицы (конкретно — в распределении Планка и формуле Саха): импульс «тяжелого» электрона при равной энергии гораздо больше, квант сильнее размазан по пространству и «цепляет» связанный электрон издалека.

Реально, конечно, для вычисления росселандова пробега пользуются более точными квантово-механическими расчетами сечений, дающими слегка другие коэффициенты и степенные факторы по сравнению с (2.33). Кроме того, принято записывать это выражение для наиболее представленных в плазме ионов z , а не $z - 1$. В любом случае наш анализ показывает, что в

$$l \sim \frac{1}{n_z^* \sigma'_{ph}}$$

(с учетом поправки на индуцированное излучение) доминируют $J \sim 4T$ у максимума весовой функции, поэтому ничуть не удивительно, что практическая формула имеет вид

$$l_{фр} \approx 1,2 \cdot 10^{15} \frac{T^2 \exp\left(\frac{J_z}{T}\right)}{n_z (z+1)^2}$$

На самом деле при $J_z < 4 \div 5 T$ присутствующая в ней больцмановская экспонента переходит в константу (на том же уровне $\sim e^5$) — тогда фотоэффект, определяющий пробег теплового излучения, происходит с основного уровня. Если выразить по Саха n_z через nn_{z+1} , то в области многократной ионизации $z \gg 1$ и $z + 1 \sim z$ (для которой можно использовать указанные в лекции 5 аппроксимации) l буквенно совпадет с аналогичным выражением для тормозного излучения, но будет в 100 раз меньше.

Область применимости качественных и точных формул для $l_{фр}$ гораздо шире, нежели для $q_{фр}$ из первой половины лекции. Объемные фоторекомбинационные потери, как мы уже знаем, энергетически

существенны в достаточно узком диапазоне температур (их диагностическая роль, конечно, может быть важна и в других обстоятельствах), будучи перекрываемыми за его пределами тормозными и линейчатыми. А вот влияние линий на транспорт запертого излучения как правило не так уж велико: в редкой плазме поглощение в них занимает малую долю площади росселандовой функции dU_{ob}/dT (см. следующую лекцию), так что выписанная практическая формула имеет обширную практику.

Теперь можно привести и точное выражение для длины пробега относительно запирающего фоторекомбинационного излучения по отношению к росселандовому пробегу

$$l'_{\text{фр}} \approx 2,5 l_{\text{фр}} \frac{T}{J_z}.$$

Еще раз стоит обратить внимание на некоторую ограниченность возможного использования этой формулы применительно к плазме в целом, а не к отдельному процессу — влияние дискретных спектральных линий на общую величину l' в различных реальных обстоятельствах может быть (и бывает) очень большим. Нетрудно видеть, что адекватность приближения «серого» вещества для изучаемого процесса уже исходно выглядит проблематичной — имеет место буквенное (функциональное) различие длин (впрочем, не для $z = T^{1/2}$). В отличие от универсально-термодинамического чернотельного спектра l'_{ω} в свободно-связанных переходах зависит не только от температуры, но и «внутренних» характеристик электронных оболочек конкретных ионов, что и проявляется в формулах. Тем не менее, практика применения этого приближения не так плоха. Не следует бояться грубых моделей, позволяющих получать простые ответы — любая информация лучше отсутствия таковой. Опасаться надо самообмана и излишнего оптимизма в оценке грубости подхода. Вперед стоит двигаться с открытыми глазами, тогда, повторим еще раз, можно пользоваться любыми приближениями — если понимать им цену и быть готовым отвечать за последствия.

Несколько отвлекаясь в сторону, следует подчеркнуть, что в жизни бывают важными не только интегральные параметры, являющиеся в данной части главными объектами изучения, но и неусредненные характеристики физических явлений. Например, парадоксальным образом оказывается, что при фоторекомбинационных потерях своей внутренней энергии плазма в определенном смысле нагревается! Это происходит из-за большей вероятности рекомбинации медленных электронов (согласно (2.30) $q_{\text{фр}}^e \propto 1/\nu$), в их функции распределения по скоростям «выедается» малоэнергичная часть. Конечно, и суммарная

с учетом затрат на ионизацию J , и чисто тепловая $mv^2/2$ энергии электронного компонента уходят из среды в виде фотонов, но число свободных электронов убывает быстрее, и удельная, приходящаяся на одну свободную частицу кинетическая энергия — она же температура — растет.

Теперь, когда мы разобрались в деталях кинетических процессов, связанных с излучательным захватом электрона в дискретное состояние, пришла пора оценить степень переионизации при «старом» корональном равновесии — предэкспоненту $K(T)$ в (2.23), прикинув баланс прямого и обратного процессов. Скорость ионизации электронным ударом найдена в первой задаче к лекции 5 путем усреднения по Максвеллу интенсивности передачи от свободных электронов к связанным собратьям энергии $\Delta\mathcal{E} \geq J_{z-1}$:

$$nn_{z-1}\langle\sigma_i v\rangle \sim nn_{z-1}z_e v_{Te} \frac{e^4}{J_{z-1}T} \exp\left(-\frac{J_{z-1}}{T}\right)$$

($z_e \leq z_n - z + 1$ — число электронов на ионизируемой оболочке). Темп же обратной реакции фоторекомбинации проще всего вывести с помощью (2.31) и того соображения, что на каждый акт рекомбинации приходится один излученный квант с известной энергией:

$$nn_z\langle\sigma_{\gamma r} v\rangle \sim \frac{q_{\text{фр}}}{J_{z-1}} \sim nn_z v_{Te} \frac{z^2 e^4}{T^2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T}{mc^2}.$$

В результате их взаимной компенсации в (2.21) получаем искомое выражение

$$K \sim \frac{\hbar c}{z^2 e^2} \frac{mc^2}{J_{z-1}} \quad (2.34)$$

(при $z_e \sim 1$), действительно демонстрирующее большую величину константы вследствие деления на квантово-механическую и релятивистскую малости (вообще-то релятивизм связанных электронов и постоянная тонкой структуры связаны между собой).

Итак, в выборе из двух зол меньшего для степени переионизации плазмы конкуренция идет по линии того, какая же из двух малых безразмерных величин

$$n\lambda_{eT}^3 \quad \text{vs} \quad \frac{z^2 e^2}{\hbar c} \frac{J_{z-1}}{mc^2} \quad (2.35)$$

больше? Очевидно, что в сильно разреженной среде с $n \rightarrow 0$ должно бы реализовываться корональное равновесие, но ситуация не так проста, поскольку при малых электронных концентрациях любое равновесие устанавливается крайне медленно, и за время наблюдения определяемая (2.21) ионизация z самым банальным образом может

не успеть пройти до конца и стационарное приближение окажется неадекватным.

В заключение лекции вернемся к потенциально доминирующей над этими малостями диэлектронной рекомбинации (естественно, только не в плазме изотопов водорода). Мы помним, что с точки зрения микроскопии она эквивалентна трехчастичной, но лишний электрон всегда доступен (находится в нужном объеме). По этой причине сечение у нее кулоновское и никакого подавления нет. Однако после «псевдосвязывания» свободного электрона всегда возможен обратный распад, ситуация стабилизируется (процесс реально завершается) лишь после «сбрасывания» лишней энергии возбужденным внутренним электроном за счет испускания кванта (и часто это является весьма заметным каналом излучательных потерь с $q_{дз} \gg q_{фр}$). Правда, ждать сего завершения разрешается долго. Для роли в (2.21) важно отношение каналов распада автоионизационного состояния. Особенно эффективны в процессе предварительного «связывания» так называемые переходы $\Delta \hat{n} = 0$ (т. е. без изменения главного квантового числа) внутреннего электрона, поскольку сечения процессов с малой передачей энергии как правило выше (ср., напр., (2.19)). Наличие таковых в дискретном неридберговском спектре связано со снятием кулоновского вырождения (некеплеровости задачи) за счет межэлектронного взаимодействия. Возникающее расщепление (энергия перехода) имеет порядок

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{ze^2}{r_{\text{Bohr}}} \sim zRy$$

($r_{\text{Bohr}} = \hbar^2 / (me^2) \approx 0,53 \text{ \AA}$ — боровский радиус), поскольку расстояние между «соседними» электронами в оболочке как раз $\sim r_{\text{Bohr}}/z$, что, грубо говоря, в $\sim z$ раз меньше характерной энергии переходов с изменением \hat{n} . Реально такие «подуровни» возникают, начиная с Li-подобного иона. При этом орбита «севшего» электрона далека (энергия его связи мала), и уже при относительно небольших n он до релаксации успевает снова ионизоваться электронным ударом. В результате возникает очень широкая по концентрации плазмы область перехода от «новой» короны к термодинамическому равновесию через «старую».

Между прочим, излучательный канал потерь, сопровождающий (и даже определяющий) диэлектронную рекомбинацию, в отличие от фоторекомбинационного, действительно охлаждает электронный компонент среды, особенно в процессах с $\Delta \hat{n} \neq 0$ — поскольку в них на возбуждение при межоболочечном переходе требуется заметная энергия, они в первую очередь связывают частицы из максвелловского «хвоста».

ЗАДАЧИ

1. Почему в формулах типа (2.31), (2.32) наличие тепловой кинетической энергии у излучающих электронов учитывается в местоположении дискретного спектрального «пика», но не в его интенсивности?

Решение. Потому, что по физике дела эта составляющая дает вклад в тормозное излучение, см. (2.30), и учитывается там.

2. С кинетической точки зрения конкуренция предэкспоненциальных множителей в ионизационном равновесии (2.35) есть конкуренция двух рекомбинационных процессов — отбора энергии у близкого к иону электрона налетающим электроном же и излучаемым γ -квантом. При таком подходе малый параметр $n\lambda_{eT}^3$ пропорционален частоте «сильных» межэлектронных столкновений

$$\nu_{ee} \sim n v_{Te} \frac{e^4}{T^2} \propto \frac{n}{T^{3/2}}$$

(т. е. без учета кулоновского логарифма), приводящих к заметному энергообмену «за один присест». С какой частотой она сопоставляется в разбираемой конкуренции?

Решение. Простейшие выкладки приводят к конкуренту в виде

$$\frac{J_{z-1}}{\hbar} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{J_{z-1}}{mc^2} \left(J_{z-1} \sim \frac{z^2 e^4 m}{\hbar^2} \right),$$

очевидно, соответствующему темпу излучения фотона электроном, «вращающимся» по орбите с энергией связи J_{z-1} . Надо иметь в виду, что, хотя подобные оценки способствуют лучшему пониманию иерархии процессов, они излишне упрощенно описывают ситуацию. На самом деле в обоих конкурирующих процессах рекомбинации бывают существенны многократные акты передачи энергии, когда «севший» на орбиту электрон довольно долго «гуляет» по энергетическим (и моментным) уровням, постепенно опускаясь вниз.

ЛЕКЦИЯ 8

Сечение поглощения в линиях. Максимально возможное излучение и минимальный росселандов пробег. Циклотронное излучение, его запырание. Ток Брагинского–Пиза в задаче о z -пинче.

Для завершения анализа $e - \gamma$ кинетики в термодинамически равновесной плазме осталось разобрать связанно-связанные переходы электронов или излучение/поглощение в линиях. Исходная декларация классического описания процессов в этой области кажется весьма самонадеянной, поскольку здесь она прикладывается к квантовому объекту в чистом виде — никаких дискретных уровней в обычной механике частиц в кулоновском поле не существует. Если раньше мы имели дело с классической системой, лишь «цепляющей» в своей эволюции квантовый мир, то теперь ее внутреннее устройство целиком и полностью определяется чуждыми классике законами, а эволюция изучается все-таки на старом языке. Тем не менее оказывается, что общее впечатление на таком пути составить можно. В качестве исторического примера стоит упомянуть первые объяснения эффекта Зеемана, полученные еще из модели атома Томсона.

Связанное состояние с точки зрения классики есть первоначально монохроматический электронный осциллятор, характеризуемый богоданной собственной частотой ω_0 (откуда она взялась — вопрос за рамками модели). Согласно (2.20) колеблющийся электрон теряет энергию на дипольное излучение с темпом, пропорциональным текущему значению его энергии (в связанном состоянии $\mathcal{E}_{\text{кин}} \sim \mathcal{E}_{\text{полн}}$):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -2\gamma\mathcal{E} \sim -\frac{e^2\omega_0^2}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \rightarrow \gamma \sim \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3} \sim \omega_0 \frac{r_0}{\lambda} \ll \omega_0, \quad (2.36)$$

поэтому в модельном динамическом уравнении движения электрона для адекватности должна учитываться так называемая сила *радиационного трения*:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0 \rightarrow -\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0, \quad (2.37)$$

$$\omega \approx \pm\omega_0 - i\gamma.$$

Из фурье-анализа видно, что параметр γ (не путать с также стандартными обозначениями релятивистского фактора или кванта) является декрементом затухания для скорости (координаты), что оправдывает введение в энергетическое уравнение (2.36) множителя 2.

Затухание осцилляторных колебаний за счет излучательных потерь приводит к потере монохроматичности их спектра, совпадающего

со спектром \dot{v}^2 . В рамках (2.37) он имеет типичную лоренцеву форму

$$\dot{v} \propto \theta(t) \exp[-(i\omega_0 + \gamma)t] \quad \rightarrow \quad |\dot{v}_\omega|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$

Определяющее размытие резонансного процесса, связанное с излучением, «обратное время жизни» γ называют также *естественной шириной линии* (без нее не было бы и наблюдения).

Для наших целей качественного знакомства с элементарными процессами нагляднее выглядит акт поглощения электромагнитной энергии классическим осциллятором. Для полноты картины (например, учета «неестественного», дополнительного уширения линии, обсуждаемого в следующей лекции) в уравнение (2.37) для связанного электрона следует добавить дополнительное трение, обеспечивающее большее размытие $\Gamma \geq 2\gamma$, и поле волны

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_\sim \exp(-i\omega t)$$

(воздействием магнитного поля $B_\sim = E_\sim$ на заряд можно пренебречь в силу малости его v_\sim/c). Решение получается тривиально

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}_\sim}{m} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}.$$

Темп поглощения (или рассеяния) электроном энергии совпадает с работой поля над зарядом (см. (1.28)), усредненным по многим периодам $1/\omega$

$$\langle -e\dot{\mathbf{r}}\mathbf{E}_\sim \exp(-i\omega t) \rangle = m\Gamma\omega^2 \frac{|\mathbf{r}|^2}{2} \equiv c \underbrace{\frac{|\mathbf{E}_\sim|^2}{8\pi}}_{S_E} \sigma_I.$$

Считать можно двумя способами. Во-первых, просто «в лоб», понимая, что комплексные гармоники $a = a_\sim \exp(-i\omega t)$ хороши в линейных выражениях, в нелинейном же варианте надо исходить из того, что физическими величинами являются $\Re a$ (или $\Im a$), поэтому

$$\langle ab \rangle \equiv \left\langle \frac{(a + \bar{a})(b + \bar{b})}{4} \right\rangle = \frac{1}{4} (\langle a\bar{b} \rangle + \langle \bar{a}b \rangle) = \frac{1}{2} \Re(a_\sim \bar{b}_\sim)$$

(другие два члена имеют множителями быстроосциллирующие функции $\exp(\pm 2i\omega t)$, и потому их среднее обращается в ноль). Во-вторых, можно умножить исходное уравнение скалярно на необходимое $m\dot{\mathbf{r}}$ и усреднять его, учитывая, что $\langle (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) \rangle = \langle (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) \rangle \equiv 0$ как средние от полных производных периодических функций. В любом варианте

получается ответ, выписанный выше, и, следовательно, сечение поглощения (рассеяния) в центре линии (т. е. при $\omega = \omega_0$)

$$\sigma_l \sim \frac{e^2}{mc} \frac{1}{\Gamma} \sim \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^2 \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad (2.38)$$

что действительно при $\Gamma \sim \gamma$ имеет порядок квадрата длины волны падающего на систему излучения (см. лекцию 2). Квантовая электродинамика подтверждает оценку (2.38).

Замечательно, что в этой сугубо квантовой задаче получается совершенно классическое выражение. Сопоставляя этот факт с возникновением \hbar в, наоборот, исходно классической задаче о тормозном излучении, трудно отделаться от впечатления о некотором эхистве природы. При естественной ширине σ_l просто огромна, всякое дополнительное уширение уменьшает эффект, оставляя его в сравнении с атомными размерами все же очень большим. Это связано с резонансностью процесса — вспомним, что для свободного электрона с $\omega_0 = 0$ вследствие отсутствия такой специфики сечение в $(\omega/\Gamma)^2$ раз меньше (см. лекцию 5). Еще одним характерным свойством взаимодействия в дискретном спектре является сильная зависимость от частоты. Именно быстрое убывание сечения с ростом жесткости квантов $\propto \omega_0^{-2}$ приводит к большим проблемам в создании коротковолновых лазеров. Простое масштабирование типа переноса схемы гелий-неонового лазера на He- и Ne-подобные ионы с большим z_α для сдвига в рентгеновскую область не проходит.

Чтобы правильно определиться с последующим разбором, следует осознать, что дискретный спектр очень индивидуален подобно линиям на пальцах и недаром используется для идентификации элементов (ионов). Положение линий, их интенсивность, ширина варьируются в очень широких пределах. Проблема ширины, кстати, вообще отдельная наука, на общем уровне обсуждаемая в следующей лекции. Здесь много специфики, универсальных ответов, к которым мы стремимся, почти нет. Без квантовой механики/электродинамики делать в этой области практически нечего, из классики, как видно, можно что-то понять, но вычислить частоту конкретного перехода, его интенсивность (величину дипольного момента и даже само его наличие — вдруг по каким-то причинам процесс идет по квадрупольному каналу) невозможно. Тут царят сугубо квантовые правила отбора, запреты, силы осцилляторов, составляя сложную, высокопрофессиональную «кухню». Иерархия процессов отнюдь не жестка, например, с ростом релятивизма (глубины уровней — для связанных электронов, как известно, $v/c \sim ze^2/(\hbar c)$) запреты «снимаются», что требует дополнительной гибкости теоретического инструментария. Сюда, конечно, мы лезть не можем и не будем.

Тем не менее, несмотря на крайний дефицит единого и монотонного в поведении, некоторые общие сентенции, причем в рамках сформулированной почти классической парадигмы, здесь все же возможны. Сосредоточимся на них. Как наличие «дискретного» взаимодействия при связанно-связанных переходах электронов сказывается на интегральных характеристиках излучательных потерь из плазмы? Стандартно ширина размытия спектральных линий мала по сравнению с расстояниями между ними даже в случае $\Gamma \gg \gamma$. По этой причине, как и упоминалось ранее, обычно вклад дискретного спектра в диффузию тепла (лучистую теплопроводность) мал, а в объемное излучение велик. Действительно, если взглянуть на усредняемые при вычислениях l' и l функции, изображенные на рис. 2.19, то нетрудно понять, что в первом случае искомый интеграл определяется пиками, а во втором — промежутками между ними. График выворачивается наизнанку, пьедестал вылезает наверх и доминирует над столпом. Казалось бы, линиями в модели лучистой теплопроводности можно пренебрегать, и дело с концом. На самом деле ситуация любопытнее, на что обратил внимание В. С. Имшенник с соавторами.

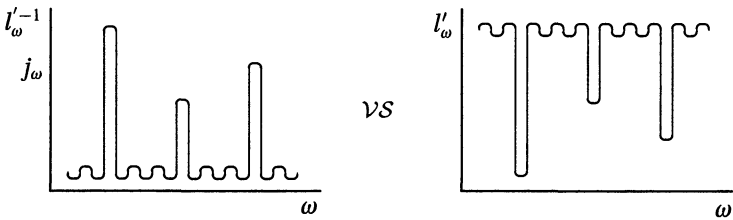


Рис. 2.19. Специфика вклада линий в излучение и поглощение

Если бы по каким-то причинам реализовывался случай предельно широких и «подходящих» по частоте в масштабах росселандовой весовой функции линий $\omega \sim \Gamma \sim T/\hbar$ (что соответствует сечению в виде

$$\sigma_l \sim \lambda_{eT}^2 \frac{e^2}{\hbar c},$$

ср. с (2.33)), то резонансное поглощение квантов сильно ограничивало бы их транспорт через среду. Такая постановка задачи позволяет получить удобную и эффективную минимальную оценку для росселандова пробега

$$l_{\min} \sim \frac{mcT}{e^2 \hbar n_{св}}, \quad (2.39)$$

где $n_{св} = (z_{я} - z)n_z$ — концентрация связанных электронов. К этому вопросу можно подойти и с другой стороны. Для столь широких спектров по крайней мере буквенно $l' \sim l$, поэтому минимально возможный пробег означает максимально возможное излучение. Дискретность здесь уже совершенно «размыта», и для связанных электронов можно снова пользоваться универсальной макроскопической оценкой (2.29) (или (2.31)) темпа потерь при «столкновении» с ионами, вокруг которых они вращаются. Очевидно, максимум достигается, если сей процесс происходит при каждом обороте:

$$q_{\max} \sim n_{св} T \underbrace{\frac{T}{\hbar}}_{\omega} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T}{mc^2}, \quad l_{\min} \sim \frac{cU_b}{q_{\max}} \quad (2.40)$$

(ср. с задачей 2 из прошлой лекции), что совпадает с (2.39).

Грубые оценки (2.39) и (2.40) могут оказаться весьма полезными, но для их более «зрячего» использования следует понять, насколько описываемый ими экстремум далек от реальности. В какой мере мы были грубы? На самом деле связанные электроны характеризуются, конечно, энергетическим параметром J_z , а не T , т. е. подобная оценка может быть хороша не просто как дальняя граница, а и как нечто близкое к существующему в эксперименте положению вещей только в очень плотной среде с $n\lambda_{eT}^3 \sim 1$. И действительно, из существенно более строгих расчетов и рассуждений (В. С. Имшенник и др.), нежели представленные здесь, при плотностях плазмы от твердотельной и выше в температурной области сотен электронвольт (для тяжелых веществ типа Pb) следует, что истинный росселандов пробег l очень близок к l_{\min} , описываемому практической формулой

$$l_{\min} \approx 10^{17} \frac{T}{(z_{я} - z)n_z}$$

В общем же случае многократно ионизованной плазмы росселанд находится «в вилке»

$$l_{\min} \leq l \leq l_{фр},$$

что тоже удобно для оценок потенциальных возможностей излучающей системы.

На самом деле связанно-связанные переходы плазменных электронов и порождаемое ими излучение в дискретном спектре имеют место не только в кулоновском поле ионов, но и в макроскопическом магнитном поле, очень часто, как мы знаем, в частности, и из предыдущей части, пронизывающим такую среду. Этот механизм со-

здает так называемое циклотронное излучение. Коротко остановимся и на нем.

Исходно его описание кажется почти примитивным: квантовая дискретность уровней Ландау частиц B в обычных ситуациях практически «не чувствуется», поскольку в них $\hbar\omega_{Be} \ll T$ (см. ниже), поэтому объемные потери считаются по абсолютно классической формуле (2.20) и составляют

$$q_{ци} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \langle v_{\perp}^2 \rangle}{c^3} \omega_{Be}^2 n \sim T \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2}{c^3}. \quad (2.41)$$

Иногда это по каким-то таинственным причинам с использованием интегрального силового баланса $nT = B^2/(8\pi)$, характерного для плазмы в магнитных ловушках, записывают в виде $q_{ци} \propto (nT)^2$, но эта процедура не имеет никакого оправдания, поскольку дает локально неправильный ответ (ведь на самом деле даже в открытых ловушках в равновесии $nT + B^2/(8\pi) = \text{const}$, про токамаки же и говорить не приходится) и трактует его в физически неадекватных задаче терминах.

На самом деле все обстоит не так просто. В не слишком сильных полях, как правило характерных для систем УТС с магнитным удержанием $\omega_{Be} < \omega_{pe}$, и это полностью нарушает исходные предположения из первой лекции. Плазма кардинальнейшим образом меняет дисперсию волн, «стандартные» электромагнитные колебания такой частоты в ней вообще не распространяются (см. рис. 1.21 касательно бесстолкновительного скин-эффекта), и физикам приходится иметь дело с анизотропными обыкновенной и необыкновенной волнами, причем даже при нарушении указанного частотного неравенства учет анизотропии диэлектрической проницаемости крайне важен.

Помимо этого, действительно объемным циклотронное излучение бывает не часто: вследствие указанной выше мягкости своих квантов, имеющей место при

$$10^{-8} B [\text{Гс}] \ll T [\text{эВ}],$$

оно очень быстро запирается. Поскольку именно это обстоятельство способствовало (квази)классическому рассмотрению динамики электрона в магнитном поле, нет ничего удивительного в том, что сие неравенство совпадает с условиями «траекторности» его движения $\lambda_{eT} \ll \rho_{Be}$ и, заодно (что уже не так очевидно), доминирования «ларморовского» магнитного момента, отвечающего за удержание в ловушке, над спиновым

$$\frac{mv_{\perp}^2}{B} \gg \frac{e\hbar}{mc}.$$

Иными словами, излучение большой в сравнении с тепловой энергией жесткости идет из ловушек, буде они построены или найдены в космосе, с другими, нестандартными законами своей жизни.

Оценим в оправдание сделанного замечания об обычной необъемности циклотронных потерь длину пробега относительно запираения в этом процессе. Поскольку все разыгрывается на рэлей-джинсовском участке равновесного теплового спектра, то для оценки начала «упирания» в чернотельную кривую $U_{\omega b}$ (см. лекцию 3) надо сопоставлять $q l' / c$ из (2.41) не с $U_b \sim T [T / (\hbar c)]^3$, а с всего лишь с

$$\int_0^{\omega_{Be}} U_{\omega b} d\omega \sim T \left(\frac{\omega_{Be}}{c} \right)^3$$

(ср. с соответствующей процедурой в задаче 3 из лекции 6). То, что вследствие «невакуумности» дисперсии волн здесь уже с ригористской точки зрения

$$\frac{T}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \not\propto T \omega^2 d\omega$$

(см. вывод (2.1)), да и с изотропией есть вопросы, не сказывается качественно на ответе. Окончательно

$$l'_{\text{ци}} \sim c \frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}^2}$$

(что, между прочим, соответствует магнитному дебаевскому радиусу r_B из первой части — случайно ли?), т. е. сечение поглощения одним электроном на циклотронном переходе (с учетом поправки на индуцированное испускание) $\sigma'_c = 1 / (n l'_{\text{ци}})$ есть

$$\sigma'_c \sim \frac{e}{B}. \quad (2.42)$$

Это весьма большая величина — она значительно превышает атомные размеры при обычных $B \ll 17$ МГс, т. е. при полях, меньших e / r_{Bohr}^2 .

Из-за очень быстрого начала запираения потерь (2.41) на практике чрезвычайно важны обертоны циклотронного излучения $\omega = k \omega_{Be}$, $k > 1$, связанные, как уже говорилось в лекции 5, с релятивизмом движения отдельных электронов — ведь чернотельный спектр здесь растет очень быстро, как ω^2 , и предоставляет бóльшие возможности для роста бóльшим частотам. Даже в отсутствие запираения эти гармоники становятся существенными весьма рано: уже при $\mathcal{E} = 50$ кэВ, т. е. $v^2 / c^2 = 1/5$ только 6% излучаемой энергии приходится на первый обертон с $k = 1$. Это приводит к дополнительно усложняющей

жизнь физикам высокой чувствительности системы форме «хвостов» функции распределения электронов по скоростям.

На самом деле начало «упирания» в $U_{\omega b}$ сильно зависит и от ширины линий отдельных гармоник. В представленных выше оценках при сравнении $q_{ци}$ с $\int U_{\omega b} d\omega$ фактически полагалось, что $\Delta\omega \sim \omega$ (почему?), тогда как обычно эта ширина определяется эффектом Доплера (см. следующую лекцию) и составляет всего лишь $\Delta\omega/\omega \sim v_{Te}/c$ (строго же поперек магнитного поля — вообще квадрат этого малого параметра). В транспорте за счет поглощения–перизлучения важны и вариации $B(\mathbf{r})$. Ситуация в целом является хорошим примером «затянутого» перехода к чернотельному излучению (смена режима $l' \rightarrow l$ нуждается, как известно, в заполнении «всего» равновесного спектра, обладающего здесь повышенной жесткостью по отношению к конкретному физическому процессу) и на практике требует решения сложной реабсорбционной задачи. Существуют экстраполяции выхода излучения по параметрам $T/(mc^2)$ и $a\omega_{pe}^2/(c\omega_{Be})$ (физическую подоплеку чего легко понять из приведенных формул), которыми и следует пользоваться.

Разговор о важных для жизни плазмы потерях энергии на излучение стоит сопровождать надлежащими примерами. В заключение данной лекции, завершающей, как сказано, некоторый этап темы, рассмотрим один из классических вариантов. Исходно он куда ближе к лекции 6, но и полученное с тех пор знание нам также потребуется. Объектом его приложения будет такая популярная система как z -пинч. Сопоставим на конкурентной основе происходящее в нем джоулево энерговыделение за счет обычной классической проводимости и тормозные потери, т. е.

$$\frac{j^2}{\sigma} \sim \left(\frac{I}{R^2}\right)^2 \frac{mv_{ei}}{ne^2} \quad \nu_S \quad nT \frac{\nu_{ei}}{\Lambda} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T}{mc^2}$$

со специально выделенным кулоновским логарифмом. Оказывается, что если учесть необходимый для равновесия (Беннета) баланс давлений $nT \sim B^2 \sim [I/(cR)]^2$, то очень многое в соотношении нагрева и охлаждения замечательным образом сокращается, и получается, что оно достигает единицы при

$$I \sim \frac{mc^3}{e} \left(\frac{\hbar c}{e^2} \Lambda\right)^{1/2}.$$

Это критическое значение принято называть *током Брагинского–Пиза* (С. И. Брагинский, R. Pease). Численно он равен $I_{BP} \sim 1,8$ МА.

Из этой простой оценки нетрудно понять, что при достаточно больших токах, пропускаемых через пинч $I > I_{BP}$, должно происходить сильное и быстрое его охлаждение и соответствующее сжатие (так называемый *радиационный коллапс*) — вплоть до запираания излучения (см. задачу 1 в лекции 6). А если вспомнить о вкладе других механизмов потерь, доминирующих при неполной обдирке ионов — то и гораздо раньше (для них, правда, таких красивых критериев не получается, но тенденция очевидна). Исторически в период выписывания этого соотношения (вторая половина 1950-х гг.) потребные величины токов были за пределами лабораторного эксперимента. Однако, сейчас они уже давно пройденный этап, в том числе и для таких тяжелых материалов как Ar, Fe, Mo, W, и тем не менее, в реальных, а не численных экспериментах сие (именно охлаждение, а не просто «вспышка» излучения) не наблюдается. Окончательной ясности с причинами такой нетривиальности природы пока нет, но одним из допустимых объяснений является изменение геометрии. Поскольку сопротивление растет при «скинированном» протекании, то в «трубчатом» по току пинче равновесие оказывается возможным при сколь угодно больших $I \sim j\delta R$, энергетический баланс дает всего лишь соотношение на толщину «скин-слоя»

$$\frac{\delta}{R} \sim \frac{I_{BP}}{I}.$$

Излишнее вещество загоняется в kern пинча и не участвует в излучении. Любопытны сопоставления этой картины с ЭМГ-сопротивлением и альфеновским пределом в пучках.

ЗАДАЧИ

1. Насколько толстым должен быть z -пинч, чтобы в нем могло реализовываться «радиационное» беннетовское равновесие из задачи 3 первой лекции?

Решение. Очевидно, для запертости излучения его росселандов пробег должен быть мал в сравнении с радиусом пинча, т. е. в любом случае необходимо, чтобы

$$R \gg l_{\min} \rightarrow n_i R r_0^2 \gg \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T}{(z_a - z) m c^2},$$

или $n_i R$ [см⁻²] $\gg 2 \cdot 10^{20} / (z_a - z) \cdot T$ [кэВ]. Снова появляется что-то, напоминающее о погонной плотности.

2. Представить (2.41) в виде (2.29). Какая малость взаимодействия $e - \gamma$ регламентирует здесь темп потерь тепловой энергии электронов при их вращении по ларморовским окружностям?

Решение. Циклотронные потери в универсальном представлении имеют вид

$$q_{\text{ци}} \sim nT\omega_{Be} \frac{B}{B_{\text{рел}}}.$$

Входящее сюда «релятивистское» магнитное поле $B_{\text{рел}} = e/r_0^2 \approx 6$ ПГс, соответствующее так называемому «пробое вакуума», очень велико.

3. Излучение, связанное с переворотом спина в магнитном поле, обладает ровно той же энергией $\hbar\omega_{Be}$, что и нерелятивистское циклотронное. Как соотносятся их интенсивности?

Решение. Сопоставляя (2.41) и результат задачи 2 из лекции 5, можно сделать вывод о том, что все определяется квадратами соответствующих дипольных моментов — электрического ларморовской орбиты и магнитного спинового:

$$(e\rho_{Be})^2 \nu_S \left(\frac{e\hbar}{mc} \right)^2 \rightarrow \frac{T}{r_0^2 r_{\text{Bohr}}} \nu_S B^2.$$

«Концентрация», стоящая в виде множителя при температуре в этом соотношении, имеет громадную величину $\sim 2 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$.

ЛЕКЦИЯ 9

Корональное равновесие по возбуждениям. Максимально возможное излучение для «богатых» электронных остовов. Доплеровское уширение линий. Другие механизмы уширения.

Для завершения знакомства с проблемами лучистого транспорта в плазме осталось еще разобрать вопрос о том, что происходит с γ -квантами в среде, не находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Достаточно очевидными представляются следующие соображения.

В тормозных и фоторекомбинационных процессах напрямую участвует прекрасный «термостат» в лице свободных электронов, распределенных по Максвеллу (если, конечно, это так). В результате в формулах для q_T и $q_{\text{фр}}$ (или для соответствующих им I') меняется лишь текущее значение z , которое все равно рекомендуется оценивать из выписанных в лекции 5 практических аппроксимаций, как уже говорилось, не слишком и различающих при своей точности термодинамику и «корону».

Аналогично обстоит дело и с I_T , а вот выражение для $I_{\text{фр}}$, где в игру вступают уже связанные электроны, может варьироваться куда сильнее — вследствие необязательности используемой при выводе как оценочных, так и практических формул больцмановской заселенности возбужденных уровней (см. ниже), и уж совсем не годится рекомендуемая в обычном режиме трансформация этого выражения с помощью формулы Саха. Впрочем, запертость такого излучения в «толстой» среде весьма способствует термодинамичности и возвращению на привычную стезю. Иными словами, отличия в этих каналах взаимодействия фотонов с плазмой не кардинальны.

«Настоящей» же модификации подвергается реакция (2.3) с участием исключительно связанных e и e' , т. е. происходящая в дискретном спектре. Все дело в том, что электроны в ионных оболочках не являются термодинамической системой и для возникновения у них такой характеристики как T нуждаются во взаимодействии со свободными собратьями и с квантами (которые при этом термализованы чем-то другим). Это приводит к качественным изменениям в самом режиме излучения в линиях в корональной плазме. Какие тут возможны варианты?

Чтобы разобраться в вопросе, необходимо изучить баланс для возбужденных ионов — другой «ипостаси» фотонов в этой задаче (возбужденный ион — потенциальный γ -квант), аналогичный балансу (2.21):

$$\dot{n}_z^* = \underbrace{nn_z \langle \sigma_{ex} v \rangle}_{\text{возб. электр.}} + \underbrace{n_\gamma n_z \langle \sigma_{\gamma e} c \rangle}_{\text{фотовозбуждение}} + \dots$$

$$\dots - \underbrace{nn_z^* \langle \sigma_{quen} v \rangle}_{\text{тушение}} - \underbrace{(1 + \alpha_{\text{инд}} n_\gamma) \frac{n_z^*}{\tau}}_{\text{высвечивание}} - \dots = 0 \quad (2.43)$$

($\tau = 1/\gamma$ — «время жизни» данного уровня). Если при исследовании ионизационного равновесия требуется анализ подобных выражений для всех z , то здесь еще и для всех возбуждений этих ионов. Под многоточиями опять-таки скрываются дополнительные физические процессы (например, рождение n_z^* при рекомбинации n_{z+1} с «посадкой» электрона на неосновной уровень).

Фактически (2.43) представляет собой запись процессов, связанных с поглощением и рассеянием квантов и только рассеянием свободных электронов (без их поглощения ионами), поэтому прямая и обратная реакции имеют одинаковый порядок по n . Именно это обстоятельство и приводит к повышенной эффективности высвобождения связанных электронов по сравнению с их возбуждением, упомянувшейся в лекции 5 и связанной с отсутствием ослабления обратных процессов в (2.43) (и его наличием в (2.21)) — вернуть частицы из непрерывного спектра «руки коротки» ($\sim \lambda_e$), а здесь достают. Тем не менее, нетермодинамическое равновесие возможно и тут. Начнем с изучения случая чисто объемных потерь, характеризуемых $q(n, T)$ (или l'), т. е. варианта, когда роль n_γ в элементарных процессах мала ($U \ll U_b$) и доминирует один (первый в (2.43)) канал возбуждения — возбуждение электронным ударом. Здесь мы встречаемся с важнейшим физическим *параметром тушения*

$$\beta_{\text{туш}} = n \langle \sigma_{quen} v \rangle \tau,$$

определяющим иерархию двух выписанных в той же формуле каналов девозбуждения и разделяющим в результате опять-таки два режима равновесия.

Первый называется термодинамическим (универсальный термин для всех детальных балансов), хотя и имеет дело с $*$, а не z . Очевидно, он реализуется при доминировании тушения возбуждения свободными электронами или $\beta_{\text{туш}} \gg 1$. Вследствие «истинности» такого равновесия, подчиняющегося всеобщим законам термодинамики, оно отличается бальцмановской заселенностью уровней, определяемой исключительно свойствами конкретного n_z и T :

$$n_z^* \sim n_z \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)$$

(с точки зрения кинетики экспоненциальность появляется опять-таки из-за максвелловского «хвоста» функции распределения свободных электронов). Потенция перехода возбуждения в квантовую ипостась проявляется лишь у малой доли ионов, избежавшей тушения, и интенсивность объемного излучения в конкретной линии

$$q = \frac{n_z^*}{\tau} \hbar \omega \propto \frac{n_z}{\tau}, \quad (2.44)$$

т. е. прямо пропорциональна концентрации ионов, в спектре которых эта линия присутствует, и ее естественной ширине.

Рождающая кванты в таком режиме плазма носит название *больцмановского излучателя* и имеет вполне четкие наблюдательные признаки. Прежде всего, она демонстрирует сильнейшую зависимость светимости от «разрешенности» данного перехода, определяющей величину τ , которое всегда, но в очень разной степени, велико в сравнении с «временем оборота» излучающего электрона $1/\omega$ — вот она, различная степень ослабленности взаимодействия. В спектре доминируют немногочисленные так называемые резонансные линии. Одни и те же ионы при данном n_z светят одинаково, являются ли они основным компонентом плазмы, или присутствуют в ней лишь в виде примеси. Отсутствие зависимости q от концентрации электронов n связано с тем, что почти все, ими возбуждаемое, они же и гасят.

Противоположный вариант с $\beta_{\text{туш}} \ll 1$ носит снова знакомое название коронального равновесия, поскольку в нем опять компенсируют друг друга прямой e^- и недетальный ему обратный γ -процесс. Здесь потенция перехода реализуется в полной мере, электронам достаточно возбудить ион, а уж об излучении фотона тот позаботится, поэтому интенсивность потерь определяется темпом рождения первой, скрытой ипостаси и

$$q = nn_z \langle \sigma_{ex} v \rangle \hbar \omega \propto nn_z. \quad (2.45)$$

Это уже *корональный излучатель* со своей яркой спецификой. Первое, что бросается в глаза (в буквальном смысле) — излучение в различных линиях вполне сравнимо между собой вне зависимости от «запретов». Скорость прямой реакции $\langle \sigma_{ex} v \rangle$ варьируется не сильно: взаимодействуют-то частицы одной природы, а внутренняя, очень чувствительная к свойствам конкретных уровней характеристика τ в (2.45) не входит — правда, граница перехода в новый режим от «запретов» и τ зависит. В спектре видно множество линий, интенсивность которых пропорциональна n , поскольку электроны играют только на одной стороне. Интересна и смена поведения у многозарядных ионов при

«внесении» их в, например, водородную плазму, поставляющую много электронов — они резко усиливают свою «светимость» (правда, и свалиться в термодинамический режим тоже могут).

Ввиду важности этой характеристики горячей корональной плазмы существует множество расчетов значений $q/(nn_z)$ как функции ее параметров (n, T, z_α , etc.) — естественно, с учетом и тормозного с фоторекомбинационным (да и диэлектронного) излучений (ср. рис. 2.18). Они базируются на последовательном решении систем (2.21) и (2.43) (напомним, для $\forall z$ и $\forall \alpha$). Как правило, результаты представляются в виде таблиц и диаграмм, очень удобных для количественного описания объемных потерь в прозрачной плазме.

Любопытно, что как и в ионизационном равновесии, в балансе (2.43) также работает принцип «меньшего из двух зол»: в зависимости от параметров среды на практике реализуется вариант с меньшими значениями населенностей верхних уровней ионов (т.е. меньшим возбуждением) и, стало быть, меньшей светимостью. Причина та же — конкуренция именно обратных процессов.

Известная отмежеванность процессов от специфичной атомной «кухни» (значений τ) в случае (2.45) позволяет и здесь дать простую, но полезную для качественных прикидок граничную оценку максимально возможных потерь на излучение в корональном пределе. Ясно, что для максимума потребны большие значения константы скорости $\langle \sigma_{ex} v \rangle$, а потому надо, чтобы возбуждал связанные электроны не только «хвост» свободных — тогда и сечение велико, и экспоненты нет, см. первую задачу в лекции 5. Для этого, в свою очередь, нужно наличие в оболочках переходов с $\hbar\omega \ll T$, присутствующих в заметных количествах при снятии кеплеровского (оно же кулоновское или ридберговское) вырождения: это, см. выше, переходы с $\Delta\hat{n} = 0$ (с энергией $\Delta\mathcal{E} \sim zRy$, тогда как обычно $T > 0,1 z^2Ry$). При осуществлении такого благоприятного стечения обстоятельств (ср. с той же ионизацией)

$$q \sim nn_z v_{Te} \sum_{\text{переходы}} \frac{e^4}{T\hbar\omega} \hbar\omega \sim n^2 \frac{e^4}{\sqrt{mT}} \frac{z_\alpha - z}{z} \quad (2.46)$$

(считается, что в излучении участвуют все связанные электроны).

Снова «на выходе» возникает классическое выражение без всякого присутствия \hbar ! Последний, специально выделенный множитель $(z_\alpha - z)/z \sim 1$ и слабо зависит от параметров плазмы в наиболее оптимальном случае «богатых» оболочек, когда ионы достаточно хорошо, но далеко не полностью «ободраны». Причина банальна — вариант $z \rightarrow 0$ плох, так как в процессе заведомо не участвуют глубокие внутренние электроны, а при $z \rightarrow z_\alpha$ участников просто мало. Это

простое рассуждение находится в хорошем даже количественном согласии с точными расчетами, дающими, например, для плазмы урана в диапазоне T от 0,5 до 10 кэВ

$$q \approx 4 \cdot 10^{-25} \frac{n^2}{T^{1/2}}$$

Причем, как обратил внимание подобравший сей скейлинг В. С. Лисица, основной вклад сюда вносят именно мягкие, существенно субтемпературные кванты. По физике дела все энергопотери свободных электронов при их столкновениях со связанными выходят из системы в виде γ -квантов (отсюда и классичность (2.46)). Можно сказать, что в обычную плазму как бы «вкраплена» в виде отдельных «фонариков» плотная светящаяся плазма оболочек, возбуждаемая пролетающими сквозь нее электронами.

Отличия в простом рождении фотонов, свободно вылетающих из среды, уже достаточно впечатляют. Однако воздействие «корональности» на характер транспорта излучения в линиях еще более радикально, что, впрочем, ничуть не удивительно, поскольку это куда более сложный процесс. Вопрос отнюдь не сводится к каким-либо (любым!) изменениям значения l . Этой проблеме целиком уделяется следующая лекция, но для продвижения в новую область следует предварительно проанализировать важнейший для нее момент — форму контуров линий q_ω (или j_ω) и их уширение (относительно естественного γ). Дело в том, что взаимодействие электронов и квантов эффективно только в резонансе, малые расстройки — большие последствия. Теория здесь представляет собой весьма обширную и сложную область, и мы, как всегда, ограничимся ее основными принципами.

Начнем с простейшего (и очень важного для горячей плазмы) — *доплеровского уширения*, на котором поймем главные идеи. Его суть в частотном сдвиге на (\mathbf{k}, \mathbf{v}) вследствие движения излучателя (см. задачу 1 в лекции 2). Каждый ион светит монохроматически (с естественной шириной), но из-за статистики их ансамбля появляется распределение по частоте с характерной шириной

$$\Delta\omega_T \sim kv_{Ti} = \omega \frac{v_{Ti}}{c}.$$

Это не диссипативное уширение, оно приводит к гауссовому (максвелловскому), а не лоренцеву контуру (см. задачу 1), но параметр γ/T в сечении поглощения (2.38) все равно есть — как мера вероятности попасть на «подходящий» сдвиг.

Все это так просто, однако, пока сохраняется синхронизм процесса, и данный ион излучает, двигаясь свободно, без помех. А на

самом деле он периодически (спорадически) сталкивается с другими ионами, меняя и направление, и скорость своего полета. Для сохранения выписанной формулы ничего подобного не должно происходить, пока излучатель когерентен с порождаемой им волной, что приводит к следующему ограничению на длину пробега ионов:

$$\ell_z \sim \frac{v_{Ti}}{v_z} \gg \lambda.$$

Иначе узкая (в γ) линия от данного излучателя не сформируется, зато у его $v(t)$ появятся свои гармоники, «накладывающиеся» на исходную ω перехода. В таком режиме уширяет не различная случайная по ансамблю статика, а дополнительный частотный спектр у каждого осциллятора, т. е. уже индивидуальная, а не ансамблевая статистика.

Разграничивает эти режимы параметр $g = \Delta\omega_{st}\tau_{\text{cor}}$, называемый *индексом модуляции* и характеризующий соотношение статического уширения и времени изменения параметров системы, определяющих индивидуальный сдвиг монохроматической линии осциллятора (т. е. времени, в течение которого сохраняется некая скоррелированность). При доплеровском уширении этот параметр — скорость, и

$$\tau_{\text{cor}} \sim \frac{1}{v_z}, \quad \Delta\omega_{st} \sim \frac{v_{Ti}}{\lambda} \quad \rightarrow \quad g \sim \frac{\ell_z}{\lambda}.$$

Если $g \ll 1$, то на пытающийся высветиться ион обрушиваются частые удары, и контур становится лоренцевым (что неудивительно из-за аналогии с «тряской» нулевыми колебаниями электромагнитного поля, порождающей γ из прошлой лекции) с

$$\Gamma \sim \frac{(kv_{Ti})^2}{v_z}.$$

Дадим двоякое пояснение этой формулы, строго выводимой в задаче 1. Во-первых, можно сказать, что из-за помех «успевает» сформироваться лишь доля ℓ_z/λ от большого сдвига (ср. с аналогичным рассуждением по поводу мягкой области тормозного спектра). Во-вторых, специфика нового режима заключается в том, что движение отдельных излучателей на «длине формирования» линии λ диффузионно, причем с коэффициентом $D \sim v_{Ti}\ell_z$. Иными словами, их средняя скорость, определяющая вполне стандартный сдвиг $\sim kv$, здесь $v_D \sim D/\lambda \ll v_{Ti}$ (а частота, стало быть, D/λ^2).

В любом подходе ширина линии уменьшается в λ/ℓ_z раз — эффект *сужения Дике* (R. Dicke). В горячей плазме он редок, но обсуждение его очень полезно с методической точки зрения, поскольку для других механизмов уширения подобное переключение режимов уже очень существенно. Здесь оно описывается линейной связью выписанных

выше асимптотик через индекс модуляции $\Delta\omega_T \cdot g \sim \Gamma$ и тем обстоятельством, что реализуется та из них, которая дает меньшее при данных параметрах плазмы значение.

Вторым по значению механизмом является так называемое *штарковское уширение*, связанное с «откликом» излучателя на пронизывающие плазму флуктуирующие электрические поля. Как правило, оно наиболее существенно для достаточно плотной и холодной среды. Технически описание этого режима гораздо сложнее и сугубо квантово-механично, поэтому здесь мы только слегка затронем его основные моменты, перенеся простейшее оперирование с новыми понятиями в задачи к данной лекции.

Стандартно сдвигающие частоту линии поля считают порождением заряженных соседей — электронов и других ионов. В «статическом» режиме их характерные значения (аналог v_{Ti} в статическом же доплеровском уширении) составляют $E_0 \sim z_\alpha e n_\alpha^{2/3}$, где индекс α пробегает те же значения e, i , что и в первой части. Частоты же вариаций этих полей (аналог $1/\tau_{\text{cor}}$) есть $\sim v_{T\alpha} n_\alpha^{1/3}$ (в экзотическом случае очень холодных электронов при $n^{1/3}$ здесь будет стоять v_{Ti} светящего иона). Форма возникающего контура определяется, как мы знаем, ансамблевой статистикой и является «слепком» (подобно тому, как гауссов контур выше был слепком же с максвелловского распределения) с функции распределения микрополей от случайно разбросанных в пространстве зарядов с данной объемной концентрацией $n_\alpha - f_H(E/E_0)$, вычисленной Хольцмарком (J. Holtzmark) еще в 1919 г. и носящей его имя. Она обладает свойствами $f_H \xrightarrow{E \rightarrow 0, \infty} 0$ и весьма отлична от максвелловской f_M , поскольку имеет «тяжелый» степенной «хвост» с расходящимся $\langle E^2 \rangle$, очень просто определяемый аналитически следующим рассуждением. Основной вклад при $E \rightarrow \infty$ дает ближайший сосед, и из баланса вероятностей его обнаружения в «полево» и обычном пространстве

$$f_H(E) dE = -4\pi n r^2 dr \xrightarrow{E \propto r^{-2}} f_H|_{E \rightarrow \infty} \propto \frac{1}{E^{5/2}}$$

(появление минуса соответствует тому, что увеличение E коррелирует с уменьшением r).

Однако для вычисления ширины $\Delta\omega_{E_0}$ и профиля линии, порождаемой таким режимом, мало знать статистику микрополей. Черезвычайно важны также первое — мультипольность взаимодействия, а именно, дипольна или квадрупольна для внешнего поля электронная оболочка у иона в данном переходе (т. е. является ли действующим фактором $\partial\varphi/\partial x_i = -E$ или $\partial^2\varphi/\partial x_i\partial x_j$), и второе — порядок теории

возмущений в воздействии этого внешнего фактора на переход (т. е. обладает ли оболочка собственным или только наведенным моментом). Здесь мы ограничимся анализом лишь дипольного взаимодействия, но в обоих вариантах, когда $\Delta\omega_E \sim (\mathbf{d}, \mathbf{E})/\hbar \propto E \vee E^2$. Первый случай характерен для водородоподобных ионов (кулоновское вырождение допускает исходное наличие $\mathbf{d} \neq 0$), и в нем контур линии повторит форму f_H , второй — для всех остальных, когда \mathbf{d} возникает только из-за поляризации во внешнем \mathbf{E} и «слепок» несколько более сложен.

Интенсивность отклика излучателя на E в этих случаях принято характеризовать двумя коэффициентами C_k , $k = 2, 4$. Индексы связаны со скейлингом сдвига частоты вследствие эффекта Штарка в поле от заряженной частицы, находящейся от данного иона на расстоянии r : $\Delta\omega = C_k/r^k$. Их нетрудно оценить, исходя из все того же представления о радиусе электронной орбиты, входящем в выражение для d , как $\sim r_{\text{Bohr}}/z$. Первый из них (C_2) находится по теории возмущений первого порядка

$$\hbar\Delta\omega \sim E \frac{er_{\text{Bohr}}}{z} \rightarrow C_2 \sim \frac{z_\alpha}{z} \frac{\hbar}{m} \left(E = \frac{z_\alpha e}{r^2} \right),$$

а второй — соответственно, второго с учетом того, что снятие ридберговского вырождения приводит к появлению в электронной оболочке мягких переходов с $\Delta\mathcal{E} \sim zRy$:

$$\hbar\Delta\omega \sim \left(E \frac{er_{\text{Bohr}}}{z} \right)^2 \frac{1}{\Delta\mathcal{E}} \rightarrow C_4 \sim C_2^2 \frac{\hbar}{\Delta\mathcal{E}} \sim C_2 \frac{z_\alpha r_{\text{Bohr}}^2}{z^2}.$$

Последняя формула может быть представлена в виде следующего соотношения на поляризацию оболочки внешним полем

$$d_{\text{pol}} \sim \frac{er_{\text{Bohr}}}{z} \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} \left(E_{\text{out}} = E, E_{\text{in}} \sim \frac{e}{(r_{\text{Bohr}}/z)^2} \right).$$

Эти оценки относятся к квантам, рождаемым в переходах между оболочками с $\hat{n} \sim 1$, что, безусловно, в реальности отнюдь не является обязательным. Самостоятельный пересчет формул на случай $\hat{n} \gg 1$ представляется поучительным. Через найденные коэффициенты выражаются и статические $\Delta\omega_E$, и индексы модуляции для линейного и квадратичного штарковского уширения:

$$g_2 = \frac{C_2 n_\alpha^{2/3}}{v_{T\alpha} n_\alpha^{1/3}} = \frac{C_2 n_\alpha^{1/3}}{v_{T\alpha}}, \quad g_4 = \frac{C_4 n_\alpha}{v_{T\alpha}}$$

соответственно.

В случае $g_k \ll 1$ система переходит в другой — ударный режим, порождающий привычный универсальный лоренцев профиль j_ω вследствие «тряски» иона. Подсчет частоты уширяющих столкновений, определяющих при этом ширину линии Γ_{imp} , опирается на те же C_k . Границей существенности нестационарного «встряхивания» при пролете мимо него соседа α на расстоянии r служит радиус Вайскопфа (V. Weisskopf), оцениваемый по эффективности вносимого полем движущегося заряда сбоя фазы излучающего диполя $\int \Delta\omega dt \sim \Delta\omega \Delta t$:

$$\frac{C_k r}{r^k v_\alpha} > 1 \quad \rightarrow \quad \rho_{W\alpha} \sim \left(\frac{C_k}{v_{T\alpha}} \right)^{1/(k-1)}.$$

Он и определяет искомые $\Gamma_{\text{imp}\alpha} \sim n_\alpha v_{T\alpha} \rho_{W\alpha}^2$. В квадратичном случае ситуация осложняется возможной неадиабатичностью пролетного взаимодействия. Дело в том, что столкновения с α при большой «внутренней» частоте столкновения $v/\rho_{W\alpha} > \Delta\mathcal{E}/\hbar$ могут инициировать переходы между уровнями с $\Delta\hat{n} = 0$, т. е. их слияние и, стало быть, возврат к водородоподобию в смысле $4 \rightarrow 2$.

Некоторые важные детали, касающиеся эффекта Штарка, см. в задачах, а здесь подведем уже некоторые итоги. Видно, что форма контуров в общем случае зависит и от статистики, и от режима, которые могут существенно варьироваться для разных сортов α . Индексы модуляции у электронов и ионов обычно весьма различны, поскольку как правило $v_{Te} \gg v_{Ti}$, так что вариант с $g_e \ll 1$ и $g_i \gg 1$ является вполне рядовым. Не следует также забывать, что в плазме присутствуют и коллективные моды (тепловые $\tilde{E}^2 \sim nT/N_D$ и надтепловые — турбулентные — шумы) с собственными частотами и статистикой. В анализе реальных ситуаций приходится учитывать и то, что за счет различных вырождений (симметрий) исходные линии ионов зачастую состоят из нескольких перекрывающихся друг друга (так называемая мультиплетность), по-разному откликающихся на внешние поля, снимающие это вырождение. «Размазка» j_ω у каждого компонента при этом своя (поскольку «елозят» по оси ω по-разному), и наблюдаемый контур линии определяется их наложением.

Существенно также различие разобранных функциональных зависимостей $j(\Delta\omega)$: оно может приводить к доминированию разных механизмов уширения в центре и на крыльях линий (скажем, широкий Доплер при больших $\Delta\omega$ неизбежно проигрывает узким Лоренцу или Хольцмарку), да и переход от статики к ударным процессам $g(\Delta\omega) \sim 1$ в действительности не есть средняя характеристика, а зависит от текущей расстройки. В жизни одновременно действуют все факторы. А ведь есть еще и эффект Зеемана . . .

ЗАДАЧИ

1. Проведя необходимое усреднение в точной формуле для контура линии

$$j(\Delta\omega) \propto \frac{1}{\pi} \Re \int_0^{\infty} \langle \exp[-i\Delta\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] \rangle dt,$$

определить его форму в случае доплеровского уширения в предельных случаях $g \gg 1$ и $g \ll 1$ (С. Чандрасекар).

Решение. При малых v_z $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, и усреднять надо по ансамблю — максвелловскому распределению по скоростям

$$\begin{aligned} \Re \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-i(\Delta\omega + kv_x)t]}{\pi} \frac{\exp\left(-\frac{v_x^2}{2v_T^2}\right)}{\sqrt{2\pi} v_T} dv_x dt &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} kv_T} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{kv_T}\right)^2\right] \propto j(\Delta\omega) \end{aligned}$$

(считается, что $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_x$).

В противоположном случае $\mathbf{r}(t)$ диффузионно, и статистика индивидуальна — усреднение идет по Гауссу

$$\Re \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\Delta\omega t + ikx)}{\pi} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{4\pi Dt}} dx dt = \frac{1}{\pi} \frac{k^2 D}{(\Delta\omega)^2 + (k^2 D)^2} \propto j(\Delta\omega).$$

2. Как видно из предыдущей задачи, стандартный доплеровский контур возникает при сворачивании максвелловского распределения с δ -функциональной линией излучателя. Но ведь на самом деле из-за конечности времени жизни возбужденного состояния иона рождаемая им линия в сопутствующей системе отсчета не бесконечно узка, а имеет лоренцев профиль. Каково же в действительности $j(\Delta\omega)$ при доплеровском уширении в максвелловской плазме?

Решение. Ситуация, очевидно, описывается сверткой

$$j(\Delta\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{v_x^2}{2v_T^2}\right)}{\sqrt{2\pi} v_T} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\Delta\omega - kv_x)^2 + \gamma^2} dv_x$$

(так называемый контур Фохта — W. Voigt). Интеграл выражается через спецфункции (заменой

$$\frac{\gamma}{(\Delta\omega - kv_x)^2 + \gamma^2} = \Re \frac{i}{\Delta\omega + i\gamma - kv_x} = \Re \int_0^{\infty} \exp[i(\Delta\omega + i\gamma - kv_x)t] dt$$

он сводится к возникающей в выражении для диэлектрической проницаемости максвелловской плазмы функции Крампа), однако понятно, что при $\gamma \ll kv_T$ в центральных областях контура замена лоренцевой на дельта-функцию оправдана и профиль линии гауссов, тогда как его далекие крылья имеют на самом деле степенной характер (при $\Delta\omega \rightarrow \infty$ лоренцева составляющая может быть вынесена из-под интеграла, ср. рассуждение про «хвосты» в следующей лекции). Надо быть очень скрупулезным и внимательным при использовании физических моделей, четко представляя себе их область применимости!

3. Как выглядит «хвост» контура линии при статическом уширении за счет квадратичного эффекта Штарка?

Решение. Как мы знаем, он является «слепок» с функции распределения по $\chi = E^2$, которая стандартным в статистике образом пересчитывается из хольцмарковской по формуле $f(\chi) d\chi = f_H(\sqrt{\chi}) d\sqrt{\chi}$. Для определения именно «хвоста» можно также воспользоваться доминированием вклада ближайшего соседа

$$f(\chi)|_{\chi \rightarrow \infty} d\chi = -4\pi n_\alpha r^2|_{r \rightarrow 0} dr \quad \chi = \frac{(z_\alpha e)^2}{r^4} \quad f(\chi)|_{\chi \rightarrow \infty} = \frac{\pi n_\alpha (z_\alpha e)^{3/2}}{\chi^{7/4}}.$$

Хвост вполне спадающий, хотя и $\langle \chi \rangle$ расходится (поскольку расходится электростатическая энергия точечного заряда). Оценка характерного $\Delta\omega_E$ в этом режиме несколько условна. Обычно для нее берут $\chi \sim (z_\alpha e)^2 n_\alpha^{4/3}$ (как это и записано в лекции). Если ввести «обрезание» расстояния до ближайшего соседа на r_{\min} (например, заведомо невозможно сближение с ионом теснее, чем на r_{Bohr}/z), то можно оперировать и уже конечным средним $(z_\alpha e)^2 n_\alpha / r_{\min}$ (см. вывод $f(\chi)$). Любопытно, что в этом случае индекс модуляции

$$g \sim C_4 \frac{n_\alpha r_{\min}}{r_{\min} \nu_{T\alpha}}$$

совпадает со стандартным.

4. Как соотносятся между собой при ударном уширении линий радиус Вайскопфа и среднее межчастичное расстояние?

Решение. По самому смыслу «ударности» в таком режиме ион взаимодействует с отдельными частицами, поэтому должно быть $\rho_{W\alpha} \ll n_\alpha^{-1/3}$. Можно сказать и по-другому — удар происходит, если время столкновения мало по сравнению с паузой между столкновениями:

$$\tau_{\text{imp}} \sim \frac{\rho_{W\alpha}}{\nu_{T\alpha}} \ll \Delta t_{\text{col}} \sim \frac{1}{n_\alpha \nu_{T\alpha} \rho_{W\alpha}^2}.$$

И действительно, в ударном пределе с учетом связи ρ_W с C_k

$$g_k \sim C_k n_\alpha^{k/3} \frac{1}{\nu_{T\alpha} n_\alpha^{1/3}} \ll 1 \quad \rightarrow \quad (n_\alpha \rho_{W\alpha}^3)^{(k-1)/3} \ll 1.$$

На основании этого соотношения иногда вводят и другое выражение для индекса модуляции

$$g' \sim \Delta \Gamma_{\text{imp}} \frac{\rho_{W\alpha}}{v_{T\alpha}} \sim n_{\alpha} \rho_{W\alpha}^3$$

(ср. с логикой обычной формулы), причем оказывается, что $g'_2 \sim g_2^3$, а $g'_4 \sim g_4$. Интересно, что так определенный индекс g'_2 для электронов очень просто связан с предэкспоненциальным множителем в (2.22) («де-Бройлевским числом»):

$$g'_2 \sim \frac{1}{z^3} \frac{1}{n \lambda_{eT}^3}.$$

Полезно также знать, что

$$\rho_{W2} \sim \frac{r_{\text{Bohr}}}{z} \frac{z_{\alpha} e^2}{\hbar v_{T\alpha}}, \quad \rho_{W4} \sim \frac{r_{\text{Bohr}}}{z} \left(\frac{z_{\alpha}^2 e^2}{\hbar v_{T\alpha}} \right)^{1/3}.$$

5. В чем специфика переключения из статического режима уширения линии в ударный при линейном и квадратичном эффекте Штарка?

Решение. Вариант с водородоподобными ионами практически идентичен случаю доплеровского уширения. Для него имеет место та же линейная связь

$$\Delta \omega_E g_2 \sim \Gamma_{\text{imp}} \left(\Delta \omega_E \sim C_2 n_{\alpha}^{2/3}, \quad \Gamma_{\text{imp}} \sim \frac{C_2^2 n_{\alpha}}{v_{T\alpha}} \right)$$

и реализация режима с меньшим уширением. А вот в квадратичном случае происходит как бы «инверсия» переключения. Здесь уже

$$\Delta \omega_E \sim \Gamma_{\text{imp}} g_4^{1/3} \left(\Delta \omega_E \sim C_4 n_{\alpha}^{4/3}, \quad \Gamma_{\text{imp}} \sim C_4^{2/3} n_{\alpha} v_{T\alpha}^{1/3} \right)$$

и, следовательно, несколько неожиданным образом наблюдается бóльшая ширина линии из возможных.

6. Проверить выполнение связи $\Gamma_{\text{imp}} g_a \sim \Delta \Gamma_{\text{non}}$ с введенным по аналогии с g «параметром адиабатичности» $g_a \sim \Delta \mathcal{E} \rho_{W\alpha} / (\hbar v_{T\alpha})$ при переключении обычного ударного уширения линии неводородоподобного иона на неадиабатичное.

Решение. Поскольку, как следует из лекции, Γ_{non} — это та же исходная Γ_{imp} , но с заменой $k = 4$ на $k = 2$, то действительно

$$n_{\alpha} v_{T\alpha} \left(\frac{C_4}{v_{T\alpha}} \right)^{2/3} \left[\frac{\Delta \mathcal{E}}{\hbar} \left(\frac{C_4}{v_{T\alpha}} \right)^{1/3} \frac{1}{v_{T\alpha}} \right] \sim n_{\alpha} v_{T\alpha} \left(\frac{C_2}{v_{T\alpha}} \right)^2$$

ввиду выведенной связи C_4 с C_2 . Это значит, что здесь снова вступает в силу тот же простой принцип меньшего из формально возможного. Полезно иметь в виду, что

$$g_a \sim \frac{\Delta \mathcal{E}}{\hbar} \frac{\rho_{W\alpha}}{v_{T\alpha}} \sim \left[\frac{(\Delta \mathcal{E})^3 C_4}{\hbar^3 v_{T\alpha}^4} \right]^{1/3} \sim z_{\alpha}^{2/3} \left(\frac{e^2}{\hbar v_{T\alpha}} \right)^{4/3}.$$

ЛЕКЦИЯ 10

Специфика блуждания в линиях. Уравнения в дробных производных. Притягивающая автомодельность и «забывание». Особенности процесса и его связь с матстатистикой.

Подготовившись к проблеме и собравшись с духом, можно заняться основной темой данной части — транспортом излучения, но в открывшихся новых обстоятельствах. Нас интересует миграция фотонов в достаточно «толстой» среде, когда они на своем пути успевают претерпеть многочисленные акты поглощения–излучения, т. е. какой-то аналог (2.12) или (2.13). Проблема, однако, в том, что, как уже было сказано, для плазмы с $\beta_{\text{туш}} \ll 1$ ситуация по самой своей сути абсолютно не похожа ни на что, описываемое этими макроскопическими уравнениями. Более того, в таком режиме неадекватно задаче уже исходное микроскопическое (2.6) (и даже (2.4) с возможностью «вставлять» в него любые характеристики j_ω и l_ω , в том числе и по отдельности, т. е. в нарушение закона Кирхгофа (2.5)), до сих пор верой и правдой служившее нам. Все дело в двойной специфике взаимодействия квантов с корональной плазмой, заслуживающей самого пристального внимания и проистекающей из того обстоятельства, что по своей микроскопической сути физика реакции (2.3) здесь куда ближе к рассеянию (с временной задержкой, см. далее) света, чем к поглощению–излучению.

1. Не всякое поглощение кванта «истинно». Термодинамично лишь тушение возмущения, приводящее к его гибели. Базовое (2.6) исходит из наличия равновесия в каждой точке среды, т. е. из стремления плазмы «привести в соответствие» прилетающие из других областей фотоны: лишние — прибить, недостающие — родить. Здесь же кванты сами создают фон, по которому распространяются: сколько прилетело, столько через время τ и улетит, плазменные электроны лишь добавляют новые возбуждения, но никакие старые не гибнут (пока в ипостаси фотона не выйдут наружу). Поглотившиеся частицы лишь временно изъяты из оборота: это сон, а не смерть (см. рассуждения о необходимости «сбоя фазы» в диффузионном процессе в конце первой части).

2. Частоты не самостоятельны. Многократно переизлучаемые кванты свободно мигрируют не только в пространстве, но и по частоте внутри спектральной линии. Фотон может с высокой вероятностью родиться в ее центре и быстро поглотиться (из-за связи прямых и обратных процессов $l_\omega^{-1} \propto j_\omega$, ср. с лекцией 2), или с низкой

вероятностью — на «крыле», зато пробежать сколь угодно далеко (не встретив подходящего по частоте поглотителя), и это будет одна и та же частица-«кентавр» квант/возбуждение.

В результате перенос лучистой энергии даже при $l_\omega \rightarrow 0$ не сводится к диффузии. Общие рассуждения о диффузионности теплопроводности из лекции 3 здесь не работают ввиду «нехорошести» поведения ℓ для линии в целом (если угодно, «неравномерной сходимости» l_ω к 0). Ситуация описывается завязанным на контур линии $q_\omega = 4\pi j_\omega$ интегральным уравнением Бибермана–Холстейна, независимо выведенным в 1947 г. Л. М. Биберманом и Т. Холстейном (Т. Holstein). Для проникновения в специфику рассмотрим простейший вариант транспортной задачи — расплывание облака возбуждений, рожденных, например, «подсветкой» внутренней области среды лазером или импульсным локальным нагревом, причем в пренебрежении при последующем энергопереносе местным рождением новых n_z^* по сравнению с создаваемым поглощением пришельцев, т. е. миграцию квантов в чистом виде, без разбавления их автохтонами.

Начнем с качественного анализа. Важнейшая характеристика процесса — вероятность «прострела», т. е. того, что родившийся в линии фотон пролетит $\geq r$:

$$P(r) = \int_0^\infty J(\omega) \exp\left(-\frac{r}{l_\omega}\right) d\omega$$

($J(\omega) \propto j_\omega \propto 1/l_\omega$ — нормированное на единицу, т. е. с $\int_0^\infty J d\omega = 1$ распределение интенсивности по контуру линии). Зависимость в экспоненте «сильнее» самой себя в коэффициенте при ней, грубо можно считать, что \exp с аргументом $r/l_\omega > 1$ все режет, так что оценочно

$$P(r) \sim 2 \int_{\Delta\omega_\Gamma}^\infty J(\Delta\omega) d\Delta\omega,$$

где интегрирование идет по отклонению частоты от центра линии $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, его нижний предел определяется соотношением $r/l_{\omega_0 + \Delta\omega_\Gamma} \sim 1$, а 2 происходит из наличия двух симметричных крыльев.

К чему это сводится для характерных форм линий, излучаемых плазмой? У лоренцевого контура на крыле $l_\omega \propto (\Delta\omega)^{-2}$ (см. первую задачу из предыдущей лекции), т. е. $\Delta\omega_\Gamma \propto \sqrt{r}$ и

$$P(r) \propto \int_{\Delta\omega_\Gamma}^\infty \frac{d\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2} = \frac{1}{\Delta\omega_\Gamma} \sim \sqrt{\frac{l_0}{r}}.$$

Необходимый по размерности коэффициент l_0 , очевидно, представляет собой (по порядку) пробег в центре линии. Для доплеровского же $\Delta\omega_r \propto \sqrt{\ln r}$ (см. ту же задачу) и

$$P(r) \propto \frac{\exp[-(\Delta\omega_r)^2]}{\Delta\omega_r} \sim \frac{l_0}{r\sqrt{\ln \frac{r}{l_0}}}$$

(в обезразмеренном на $\Delta\omega_T$ виде), с аналогично определяемым l_0 , поскольку

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \exp(-y^2) dy &= \\ &= \int_0^\infty \exp[-(x-y)^2] dy \stackrel{x \gg 1}{\approx} \exp(-x^2) \int_0^\infty \exp(-2xy) dy = \frac{\exp(-x^2)}{2x}. \end{aligned}$$

Для таких вероятностей средние квадраты пробега квантов $\langle r^2 \rangle$ (и, стало быть, единичные ℓ) бесконечны

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(- \int_0^R r^2 \frac{dP}{dr} dr \right) = \infty,$$

причем при лоренцевом профиле расходится даже $\langle r \rangle$, «переселенцы» демонстрируют крайнюю пассивность. Проблема заключается в неограниченности крыльев: для $J(|\Delta\omega| > \omega_r) \equiv 0$ ситуация старая, а даже для чрезвычайно быстро убывающей гауссовой функции уже все по-другому. Очевидно, что результатом могут быть только нелокальные уравнения энергопереноса. Процесс стохастичен, поскольку последовательные пробеги квантов нескоррелированы между собой (см., впрочем, задачу 3), транспорт как и в диффузии происходит из-за того, что уходящий из данной точки «наперсток» с шариками-фотонами сменяется другим (см. часть 1), но путешествия этих наперстков бывают очень дальними, не из левой руки в правую, а из Антакиды во Владивосток через Гибралтар.

Как мы знаем, такие переносы достаточно информативно характеризуются автомодельными скейлингами $\langle R^2 \rangle \propto t^\alpha$. В данном варианте α можно найти путем следующего несложного рассуждения. Время смещения на R фронта излучения (возбуждений) оценивается соотношением $t(R) \sim \tau/P(R)$: сначала мимо наблюдателя в данной точке пролетают «прострельные» кванты в количестве $P(R)$ от общего числа, затем, после «отсидки» в течение τ застрявшей по пути

основной части, следующая порция и т. д., а как только наберется ~ 1 — вот и фронт пришел. Следовательно, закон его движения супердиффузионен с

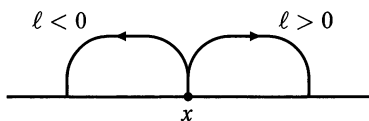
$$R \propto \begin{cases} t^2 & \text{для лоренцевого контура} \\ \frac{t}{\sqrt{\ln t}} & \text{для доплеровского контура} \end{cases},$$

т. е. соответствует равноускоренному или почти баллистическому движению.

Эта же важнейшая для физики дела функция $P(r)$ входит и в оценку «термодинамической» толщины плазмы, начиная с которой происходит возврат к базовому уравнению (2.6) и диффузии в миграции излучения по толстой среде:

$$P(a) \sim \beta_{\text{туш}}.$$

Действительно, для установления истинного равновесия хватает уже одного акта тушения («убийства») за все время жизни кванта (возбуждения) в плазме $t(a)$. А до той поры излучение (если вспомнить о рождении новых n_z^* электронным ударом) даже в случае его весьма сильной «запертости» в смысле $l_0 \ll a$ выглядит абсолютно объемным.



$$P[l \in (\xi, \xi + d\xi)] = g(\xi) d\xi, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(l) dl \equiv 1$$

Рис. 2.20. Блуждания пьяницы

Мы вновь встречаемся с явлением (понятием) нелокального переноса. Остановимся несколько более подробно, чем ранее, на математической стороне подобных процессов. Основой послужит классическая (разобранная еще лордом Рэлеем) одномерная модель случайных блужданий — толпа пьяных матросов: каждые τ секунд частицы на оси x прыгают влево–вправо на расстояние ℓ с вероятностью, описываемой симметричной плотностью $g(|\ell|)$, рис. 2.20 (ср. рис. 1.38). Она тривиальным образом связана с введенной выше вероятностью прострельного перемещения: $\int_x^\infty g(x) dx \sim P(x)$. В такой модели эволюция плотности толпы n описывается уравнением

$$n(x, t + \tau) - n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [n(x', t) - n(x, t)] g(x - x') dx', \quad (2.47)$$

в котором удобства ради (см. ниже) произведен одновременный вычет $n(x, t)$ из левой и правой частей. В случае плавности распределения макроскопической концентрации на микроскопических пространственно-временных масштабах ℓ, τ (а процесс разбредания толпы в силу своей стохастичности идет именно в сторону выполаживания $n(x, t)$ по обеим переменным, в чем нетрудно убедиться «задним числом», проанализировав решения выводимых ниже асимптотических вариантов (2.47)), можно разложить n в ряд по t

$$n(x, t + \tau) = n(x, t) + \tau \frac{\partial n(t)}{\partial t} + o(\tau)$$

и, с учетом того, что $x' = x - (x - x')$, по x :

$$n(x', t) = n(x, t) - (x - x') \frac{\partial n(x)}{\partial x} + (x - x')^2 \frac{\partial^2 n(x)}{\partial x^2} + o[(x - x')^2].$$

Подставив это в исходное уравнение и пользуясь четностью $g(x)$, нетрудно строго получить лишь упомянутое при рис. 1.38 и качественно оцененное при рис. 2.7 стандартное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} \approx D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad \left(D = \frac{\langle \ell^2 \rangle}{2\tau} \right).$$

Однако не менее просто заметить, что при $\int \ell^2 g(\ell) d\ell = \infty$ или наличии в системе так называемых полетов Левй (P. Lévy) — т. е. как раз пресловутой пассионарности мигрантов — процесс распывания в рамках (2.47) является принципиально нелокальным.

Очевидно, что в этом варианте динамика определяется степенью расходимости сего интеграла, т. е. «хвостами» g , поэтому асимптотически при сильном расширении толпы можно положить $g \propto |\ell|^{-2\beta-1}$ ($\beta < 1$, в классическом уравнении Бибермана–Холстейна, где интересуются не только суммарным по контуру транспортом, такое приближение не делается) и записать

$$\frac{\partial n}{\partial t} \propto \mathcal{P} \int \frac{n(x')}{|x - x'|^{2\beta+1}} dx' \quad (2.48)$$

(расходимость при $x' = x$ регуляризуется именно вычитанием $n(x, t)$ и пониманием интеграла в смысле главного значения), ср. (1.25) и (1.47). Менее громоздко, как мы знаем, это выглядит после пространственного фурье-преобразования и обезразмеривания:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -k^{2\beta} n_{\mathbf{k}},$$

позволяя называть интегральный оператор в правой части дробной степенью лапласиана $-(\Delta)^\beta$. Скажем, для лоренцевого контура линии это, оказывается, $\sqrt[4]{}$. Действительно, как и указывалось в конце лекции 10 прошлой части, уравнение эволюции (2.48) представляет собой типичный закон сохранения, но с нелокальной плотностью потока:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} \propto -\nabla \int \frac{n(x')}{|x - x'|^{2\beta-1}} dx'$$

(следует обратить внимание, что за счет вынесения операторов дифференцирования из-под свертки можно снять расходимость в $x' = x$ и понимать интеграл в обычном смысле).

При решении начальной задачи оперировать с такими «энтропийными» уравнениями не сложнее, чем с диффузионным (их частным случаем). На помощь физикам приходит опять-таки «забывание» в процессе монотонного и неограниченного расплывания облака возмущений в корональной плазме, универсально приводящее к выходу на единый для каждого β «притягивающий» автомодельный профиль $n_0(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} n_{\text{авт}}(x, t)$ (с граничной же задачей все, конечно, нетривиальнее).

Поскольку (2.48) линейно и удовлетворяет принципу суперпозиции, то его общее решение для произвольных начальных условий $n(x, t = 0) = n_0(x)$ выражается через функцию Грина

$$n(x, t) = \int G(x - x', t) n_0(x') dx' \quad \& \quad n_{\mathbf{k}}(t) = G_{\mathbf{k}}(t) n_{0\mathbf{k}}, \quad (2.49)$$

имеющую автомодельный вид (вот оно, универсальное расплывание)

$$G = \frac{1}{t^{1/2\beta}} \widehat{G}_\beta(\xi) \quad \left(\xi = \frac{x}{t^{1/2\beta}} \right) \quad \& \quad G_{\mathbf{k}} = \exp(-k^{2\beta} t).$$

Из такого представления сразу видна причина «забывания» деталей начального состояния $n_0(x)$ – в процессе эволюции ФГ постепенно,

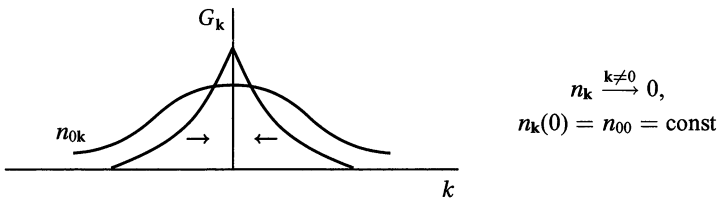


Рис. 2.21. «Забывание» начального гармонического многообразия

но неуклонно «вырезает» из начального профиля все гармоники с $|k| \neq 0$ (рис. 2.21), и система теряет всю информацию о себе за исклю-

чением сохраняющегося полного числа частиц (матросов), поскольку нулевая гармоника

$$n_{00} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} n_0(x) dx$$

(ср. с разбором обычной диффузии в лекции 4 из первой части и ее нелинейного варианта в здешней четвертой лекции).

Выход на автомодельность можно исследовать и в x -пространстве, разлагая в ряд плавное (на масштабах n_0) G в формуле (2.49):

$$\begin{aligned} n(x, t) &= G \underbrace{\int n_0(x') dx'}_{\phi_1(\xi)/t^{1/2\beta}} - \frac{\partial G}{\partial x} \underbrace{\int x' n_0(x') dx'}_{\phi_2(\xi)/t^{1/\beta}} + \dots = \\ &= AG(x - x_0) \left[1 + O\left(\frac{1}{t^{1/\beta}}\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0(x) dx, \quad x_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x n_0(x) dx}{A}.$$

Для обычной диффузии, соответствующей $\beta = 1$ в фурье-формулах, возможна еще и компенсация начального $\langle x^2 \rangle$ за счет $t \rightarrow t + t_0$ (ведь тогда $\partial G/\partial t \propto \partial^2 G/\partial x^2$). Здесь опять уместно сопоставление со сказанным про лучистую теплопроводность.

Конечно, аналитические выражения для $\widehat{G}_\beta(\xi)$ существуют лишь для некоторых значений β , например, для $\beta = 1/2$ это так называемое распределение Коши

$$\widehat{G}_{1/2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2},$$

но их качественные свойства достаточно просты. Наиболее важен степенной «хвост» при $\xi \rightarrow \pm\infty$, соответствующий угловой точке G_k при $k = 0$. Он сразу виден при выносе $g(x - x') \approx g(x)$ из-под интеграла в (2.48):

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \propto \frac{1}{|x|^{2\beta+1}} \int n(x') dx' \quad \rightarrow \quad n|_{x \rightarrow \pm\infty} \propto \frac{At}{|x|^{2\beta+1}}$$

(а $n \approx G$). Линейный рост во времени связан с накоплением «прострельных» квантов (матросов), прилетающих из области локализации возбуждений (основной толпы).

Функции $\widehat{G}_\beta(\xi)$ имеют бесконечную дисперсию и как раз относятся к классу устойчивых распределений, упомянутых в последней лекции прошлой части. Напомним, что таковые отличаются сохранением своего вида при переходе от ξ к $\sum_{i=1}^N \xi_i/N$: среднее в серии опытов для них распределено аналогично индивидуальной статистике. Это очевидным образом связано с тем, что

$$\widehat{G}_{\beta k}^\Sigma \equiv (\widehat{G}_{\beta k})^N = \exp(-Nk^{2\beta}),$$

поскольку в матстатистике функция распределения суммы независимых величин есть композиция (свертка) распределений слагаемых, а ее фурье-образ (называемый *характеристической функцией*) — произведение таковых.

Так выглядит математическая модель блуждания линейчатых квантов/возбуждений в корональной плазме. Выведенные на качественном уровне законы эволюции энергетического облака находят в ней строгое и количественное подтверждение. Переход к трехмерной геометрии тривиален ($|\mathbf{k}|^{2\beta}$ в (2.48)). Здесь в обязательном порядке получается ускоренное по отношению к обычной диффузии расширение $\langle R^2 \rangle \propto t^{1/\beta}$ с $\beta \leq 1$, причем для квантов как правило $\beta \leq 1/2$ (быстроспадающие хвосты с $\beta > 1$, согласно проделанному анализу порождают привычное уравнение диффузии с $\beta \equiv 1$ в фурье-представлении). Конечно, речь идет о «скейлинговом» или автомодельном, а не буквальном соотношении, ибо ведь в действительности здесь $\langle R^2 \rangle \rightarrow \infty$ — еще один камешек в огород общеупотребительной номенклатуры (см. десятую лекцию в первой части). Разумеется, все просто лишь в однородной плазме. Если ширина, форма линий и само их наличие варьируются в пространстве и времени (скажем, из-за вариаций T), то описание становится много сложнее.

В завершение лекции осталось лишь разобрать два принципиальных вопроса, связанных с таким инструментарием, имеющим отношение, как мы знаем, к проблемам не только лучистого переноса. Во-первых, важно знать, можно ли распространить методу на субдиффузионные режимы, положив в (2.48) формально $\beta > 1$ у Δ^β ? Может быть, таковы какие-нибудь другие транспортные процессы?

Ответ здесь отрицателен. ФГ и, стало быть, асимптотический профиль n , в этом случае теряет знакоопределенность:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x) dx \equiv - \left. \frac{d^2 G_k}{dk^2} \right|_{k=0} \propto k^{2\beta-2} \Big|_{k=0} = 0$$

(в том числе и при целых значениях степени типа $\beta = 2$), что возможно только при наличии отрицательных участков на профиле G ,

к которому в обязательном порядке подтягивается n . Это совершенно неприемлемо, идет ли речь о переносе частиц или температуры (но, впрочем, не запрещено для магнитного поля).

Во-вторых, интересно, нельзя ли распространить методу на субдиффузионные режимы, введя распределение по задержке τ ? На этот вопрос ответ уже положителен, но ситуация нетривиальна. Действительно, в случае бесконечного среднего времени ожидания прыжка $\langle \tau \rangle = \infty$ (наличия так называемая «ловушек») удается выписать уравнение с дробной временной производной $\partial^\gamma n / \partial t^\gamma$ (т. е. $p^\gamma n_p$ в лаплас-образе, см. лекцию 10 первой части), в котором степень $\gamma \leq 1$ зависит от закона расходимости «хвоста» плотности распределения $f(\tau)|_{\tau \rightarrow \infty} \propto \tau^{-\gamma-1}$. Однако, сама возможность описания системы микроскопическим n требует здесь *дополнительных* условий, поскольку частицы «помнят» время своего прибытия в данную точку и находятся здесь (с точки зрения своего вылета) не на равных правах (см. задачу 3 в той же лекции). Дробность по x и t различна! Этот тип уравнений и формально и физически допускает распространение на случай $\gamma > 1$. Например, супердиффузия в плоском течении Дрейзина–Дыхне описывается нелокальным по времени уравнением с $\gamma = 3/2$. Круг нетривиального стохастического транспорта замыкается!

Поэтому не следует забывать, что, хотя рассмотренная здесь микроскопическая модель блужданий отдельных частиц автоматически заставляет задействовать в теории уравнения в дробных производных, это — не единственная причина возникновения таких операторов в физических задачах. Да, модель вполне хороша, например, для описания смещений точек пересечения линией тока сечения Пуанкаре, но дробные степени лапласиана возникали у нас и в других случаях — скажем, в задачах о максвелловской релаксации заряда в тонкой пленке. Между прочим, и при обычной диффузии магнитного поля в проводнике нет никаких микроскопических «частиц» V . Субдиффузионный транспорт в конвективных ячейках и в одномерном сжимаемом течении, хотя и может быть интерпретирован на языке «ловушек», но с самого начала имеет дело исключительно с микроскопическим гидродинамическим описанием. Случай же Дрейзина–Дыхне вообще совсем другой. Однако последовательное и честное обращение с исходными эволюционными уравнениями неизбежно приводит к $\partial^\gamma / \partial t^\gamma$ и $-(-\Delta)^\beta$.

ЗАДАЧИ

1. По какому автомодельному закону расширяется облако возбуждений за счет миграции квантов с хольцмарковским контуром линии $J \propto (\Delta\omega)^{-5/2}$ на крыле?

Решение. Повторяя вычисления вероятности прострельного выхода фотонов для данного варианта, нетрудно убедиться, что $\Delta\omega_T \propto r^{2/5}$, $P(r) \sim (l_0/r)^{3/5}$ и $R \propto t^{5/3}$.

2. Как изменится эволюция частиц в системе с быстроспадающей, но несимметричной $g(\ell)$ (т. е. при $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell g d\ell = \langle \ell \rangle \neq 0$)?

Решение. Для правильного учета иерархии эффектов следует проводить переход от дискретной по времени системы к непрерывной в два этапа. В первом приближении в уравнении (2.47) будет доминировать первая производная по x :

$$\frac{\partial n}{\partial t} \tau \approx -\frac{\partial n}{\partial x} \langle \ell \rangle,$$

так что прежде всего в эволюции проявится снос с постоянной скоростью $v = \langle \ell \rangle / \tau$. Поправку к этому закону следует искать в «сопутствующей» системе координат (т. е. совершить замену $x, t \rightarrow x - vt, t$), в которой, очевидно, в (2.47) происходит замена $g(\ell) \rightarrow g(\ell + \langle \ell \rangle)$. Окончательно,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} \approx D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad D = \frac{\langle \ell^2 \rangle - \langle \ell \rangle^2}{2\tau}.$$

3. Найти уравнение для эволюции частиц при их блуждании по дискретным узлам, отстоящим друг от друга на расстоянии ℓ , в случае, когда вероятность сохранить на следующем шаге направление своего движения p отлична от $1/2$ (так называемый «persistent random walk»).

Решение. Поскольку в данном случае наличествует кратковременная «память» о предыдущем движении, следует разделять частицы, пришедшие в данную точку справа и слева. Дискретные уравнения для их плотностей запишутся в виде (здесь $q = 1 - p$)

$$\begin{aligned} \vec{n}(x, t + \tau) &= \vec{n}(x - \ell, t)p + \overleftarrow{n}(x - \ell, t)q \\ \overleftarrow{n}(x, t + \tau) &= \vec{n}(x + \ell, t)q + \overleftarrow{n}(x + \ell, t)p \end{aligned}$$

Вычитая слева и справа каждого уравнения $\vec{n}(x, t)$ и $\overleftarrow{n}(x, t)$ соответственно, вводя полную и асимметричную плотности частиц $N, v = \vec{n} \pm \overleftarrow{n}$, переходя к непрерывному описанию за счет представления разности через первые члены ряда Тейлора, а также используя малость ℓ, τ по сравнению с характерными пространственно-временными масштабами изменения N, v , можно получить ($q \neq 0$)

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx \frac{\ell^2}{2\tau} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{(p - q)\ell}{\tau} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 \approx -\ell \frac{\partial N}{\partial x} - 2qv.$$

Окончательно оказывается, что и такие, с «девичьей» памятью, частицы эволюционируют диффузионно:

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx \frac{p}{q} \frac{\ell^2}{2\tau} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}.$$

Исключение составляют лишь два предельных варианта — с $p = 0$, когда макроскопическая эволюция вообще отсутствует

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx 0,$$

и с $q = 0$, в котором из-за зануления старшего члена $\propto v$ во втором уравнении получается

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx -\frac{\ell}{\tau} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \approx -\frac{\ell}{\tau} \frac{\partial N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \left(\frac{\ell}{\tau}\right)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \approx 0$$

с наглядной интерпретацией расщепления начального профиля на «волны», бегущие направо и налево. Как и обычно в подобных задачах, оправдание пренебрежения лишними членами удобно проводить задним числом — исходя из выписанных уравнений и следующих из них скейлингов, убедиться в их малости по сравнению с оставленными по параметрам τ/t и ℓ/x . Например, оказывается, что время установления диффузионного режима $t \propto 1/q$.

ЛЕКЦИЯ 11

Критерий Лоусона. Универсальность параметра ρr . Понятие о детонации как физическом явлении, термоядерная детонация. Использование лучистой энергии для термояда.

В качестве практического приложения полученных знаний достаточно бегло посмотрим на роль излучения в проблеме УТС. Аналогично ситуации с любым физическим процессом в техническом мероприятии, эта роль бывает и отрицательной, и положительной, что проявляется уже на лингвистическом уровне: если физики говорят о потерях — значит, чего-то их не устраивает, а если о транспорте — то, может быть, все не так плохо. Задача нашей изобретательности — заставить законы природы играть на своей стороне, или, точнее, «подстроить» свои конструкции под их непреложность.

Начнем с классического критерия Лоусона для стационарных систем УТС «с удержанием». Исторически в энергетическом балансе нагрева–охлаждения для определенности дейтериево-тритиевой плазмы с внутренней энергией $E = 3(n_i + n)T/2$

$$\frac{dE}{dt} = P - Q - \frac{E}{\tau_E}$$

выделяют вклады ядерных реакций $P = n_D n_T \langle \sigma_{яд} v \rangle \mathcal{E}_{яд}$, излучательных объемных (запереть фотоны при потребных температурах очень сложно) потерь $Q = nn_z f(T)$ (стандартно в этой области — тормозных с $f(T) \propto \sqrt{T}$) и — абсолютно условно — всех остальных паразитных эффектов, загоняемых в один глобальный параметр τ_E — энергетическое «время жизни». Иногда все же стараются разнообразить ситуацию, учитывая дополнительный нагрев, рециклинг энергии и т. п., были и попытки выделить отдельной строкой потери на циклотронное излучение, перезарядку etc.

В базовом варианте для неохлаждения системы или $d/dt \geq 0$ требуется, чтобы (очевидно, $n_D = n_T = n_i/2 = n/2$)

$$n\tau_E \geq \frac{3T}{\langle \sigma_{яд} v \rangle \frac{\mathcal{E}_{яд}}{4} - f(T)},$$

причем минимум по T правой части в данном энергетически оптимальнейшем варианте DT-смеси оказывается $\sim 10^{14}$ с/см³. Для DD-реакции он гораздо больше — у нее в области 5 ÷ 10 кэВ сечение раз в 100 меньше (из-за отсутствия резонанса), хотя при ~ 1 МэВ $\sigma_{яд}$ оказываются одного порядка. В этой же модели очень легко вводится полезное понятие «летальных концентраций» примесей тяжелых

элементов, приводящих к необходимости $\tau_E \rightarrow \infty$ (эффект z^2 в излучении).

Недостатки критерия — примитивность и грубость — являются прямым продолжением его достоинств, исторически он был важен как некий «маяк», но уже давно перестал встречаться на страницах центральной, да и научной прессы. К нему, как далекой земле, надо было стремиться, но, доплыв, заметили, что земля эта разная — пустыни, джунгли или льды — и требует более детальных характеристик. Любопытно, однако, что в импульсных (инерционных) системах УТС этот критерий и появился гораздо раньше (еще в бомбовой тематике), и активно используется по сю пору: здесь он гораздо универсальнее и «сподручнее» для многих практических оценок, поскольку очень хорошо параметризует многие важные физические процессы. В этой области его, уже обычно не называя критерием Лоусона, принято записывать в другой форме, проводя замены $\tau_E = \tau \rightarrow r/c_S$ (τ уже просто время существования системы размера r , разлетающейся после нагрева со скоростью, порядка звуковой) и $n_z \rightarrow \rho$: как $(\rho r)_{\min}$ и измерять в $\text{г}/\text{см}^2$. Для DT он оказывается $\sim 0,01$, а для DD $\sim 0,4$. На самом деле произведение ρr характеризует много больше деталей жизни термоядерной системы.

В оправдание сделанного утверждения, дадим несколько примеров удачного описания явлений, связанных с инерциальным термоядом, в терминах этого параметра (помимо положительности энергетического баланса).

1. «Застревание» продуктов реакции в материнской плазме. Процесс очень важен для «переработки» выделяющейся энергии. Адекватность параметра связана с тем, что пробег продуктов $\ell \propto 1/n$. Например, для нейтронов требуется 5, и обычно они уходят, а α -частицы — нет. В приведенных выше численных значениях ρr и $n\tau_E$ это учтено.

2. Степень выгорания $\alpha = (n_{я0} - n_{я\text{кон}})/n_{я0}$ термоядерного горючего. Также одно из ключевых для энергетики понятий. Поскольку убыль реагентов происходит по закону

$$\dot{n}_{я} = -n_{я}^2 \langle \sigma_{яд} v \rangle$$

(термоядерные реакции «бимолекулярны»), то все и выражается через этот параметр

$$\frac{1}{n_{я}} \Big|_0^{\tau} = \frac{\alpha}{n_{я0}(1-\alpha)} = \langle \sigma_{яд} v \rangle \tau \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\rho r}{C(T, \sigma_{яд}) + \rho r}$$

и фиксированную для данной реакции константу C . Для DT смеси и $T \sim 10$ кэВ $C \sim 5$, а для DD и ~ 20 кэВ $C \sim 130$. Сравнение с кри-

тическими значениями ρr свидетельствует о весьма низкой степени выгорания в «рабочем» режиме — что делать. Доля «вторичных» продуктов процесса (скажем, возникающих при поглощении нейтрона первичными) тоже растет с ρr (см. задачу 1), что может быть использовано для оценки этого параметра в эксперименте.

3. Временная динамика нагрева термоядерной мишени. В стандартной схеме предполагается сжимать термоядерную смесь разгоняемой каким-либо драйвером оболочкой в сферически симметричном и адиабатическом режиме. Скорость процесса должна быть $|\dot{r}| \leq c_S$ — во избежание рождения ударных волн, препятствующих достижению высоких n (резкий нагрев на ранней стадии создает сильное противодействие в последующем), более важных для микровзрыва, чем даже T (см. ниже). Тогда, при предельно быстрой скорости сжатия в c_S энергетический баланс горючего с учетом потерь на тормозник и охлаждения на оболочку через электронную теплопроводность выглядит представленным на рис. 2.22 образом (нагрев при сжатии $-P\dot{V}$, объем

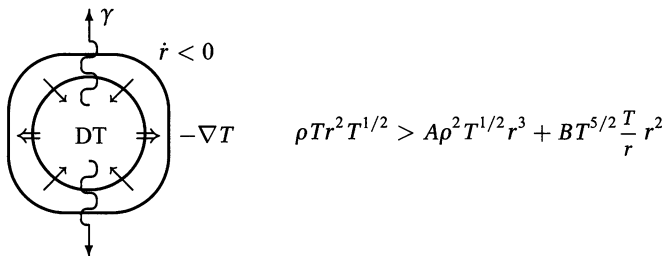


Рис. 2.22. Динамика термоядерной мишени

мишени $V \sim r^3$, площадь оболочки $\sim r^2$, коэффициент теплопроводности $\propto T^{5/2}$, а A и B параметры, не зависящие от n и T). Его нетрудно переписать в виде

$$\rho r \frac{A}{T} + \frac{B T^2}{\rho r} < 1,$$

из которого сразу виден минимум у левой части неравенства при $\rho r \propto T^{3/2}(t)$, который и желательно «отслеживать» в течение всего процесса сжатия, и уж обязательно выполнить в конце в момент достижения T_{\max} перед вспышкой. Любопытно, что если используемое устройство при начальных ρr и T не попадает в оптимум, и в потерях доминирует теплопроводность, то для улучшения ситуации можно добавить в горючее тяжелую примесь. Зависимости двух коэффициентов в неравенстве от эффективного z различны ($dA/dz > 0$, а $dB/dz < 0$ — почему?), и в результате указанной технической про-

цедуры теоретический график (при фиксированном T) не только поднимется вверх, но и сместится влево (рис. 2.23). Новый оптимум будет «подстроен» под потребности, и система заработает эффективнее: уменьшение основного канала потерь превалирует над ростом исходно слабого напарника!

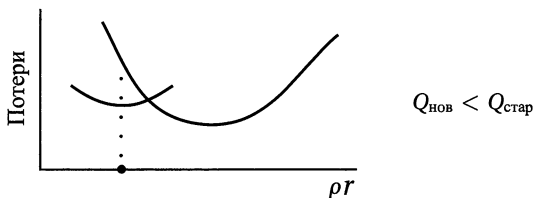


Рис. 2.23. «Переключение» каналов потерь

Какой вывод можно сделать из этих трех примеров? Видно, что скорость и глубина реакций синтеза, а значит, и энергетический выход при данной массе топлива растут с увеличением ρr . С другой стороны, затраты на инициирование (так называемый «поджиг»), пропорциональные той же полной массе «заряда» ρr^3 , при данном ρr уменьшаются с повышением ρ (уменьшением r). Трехмерность нашего мира позволяет простым сжатием продвинуться как в одном, так и в другом направлении: нарастить и ρr , и ρ . При сферической симметрии процесса

$$\rho r = (\rho r)_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2. \quad (2.50)$$

В действительности этот прием далеко не так прост из-за неизбежных неустойчивостей сжатия, в конце концов нарушающих симметрию, обеспечивающую столь хорошую степень 2, но все же осуществим в разумных пределах. Поскольку в импульсных системах приходится иметь дело хотя и с микро-, но взрывами, сделаем небольшой экскурс в, собственно, взрывную тематику.

Многие представления в этой области появились еще при конструировании и испытаниях обычных боеприпасов. Из химии известно, что возможны два как бы предельных режима прохождения экзотермической реакции — *медленное горение* и *детонация* или горение в ударной волне. Их интенсивность лимитируется подводом энергии, «зажигающей» смесь за счет роста T и преодоления аррениусовой экспоненты, по теплопроводностному и гидродинамическому каналам соответственно.

В первом варианте ширина фронта горения и его скорость определяются температуропроводностью вещества, так что за время выго-

рания захваченной реакцией исходной смеси теплопроводность успевает прогреть новую порцию, подготовив ее для зажигания:

$$\delta \sim \sqrt{\chi \tau_{\text{реак}}}, \quad u \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau_{\text{реак}}}} \sim c_S \sqrt{\frac{\tau_{\text{ст}}}{\tau_{\text{реак}}}},$$

(рис. 2.24 слева). Последняя оценка следует из того, что в газовых смесях коэффициент $\chi \sim \nu_T^2 \tau_{\text{ст}}$ ($\tau_{\text{ст}}$ — обратная частота столкновений между молекулами) и $\nu_T \sim c_S$ (ср. лекцию 4). Поскольку обычно к реакции приводят лишь редкие столкновения достаточно энергичных частиц на «хвосте» максвелловского распределения (отсюда, собственно, и возникает упомянутая ранее экспонента с «энергией активации» в скорости реакции), то стандартно в этой области $u \ll c_S$ и $\delta \gg \ell$.

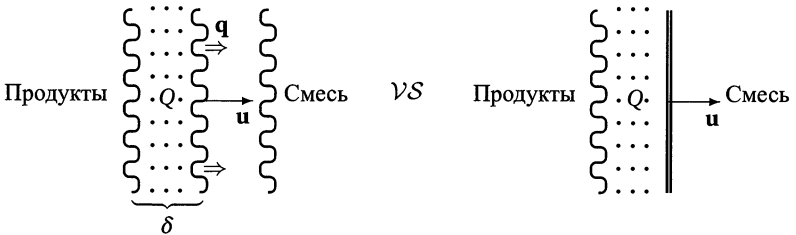


Рис. 2.24. Сравнение двух режимов горения

Во втором фронт — это «сэндвич» из обычной ударной волны (с шириной порядка длины свободного пробега и $u > c_S$ относительно исходной смеси) и «подталкивающей» ее зоны реакции, так что относительно конечных продуктов его скорость превышает скорость обычной УВ и достигает c_S , что соответствует так называемому условию Чепмена–Жуге (рис. 2.24 справа). Подготовка смеси к реакции происходит чрезвычайно быстро, поскольку ударные волны очень эффективно «перерабатывают» регулярную энергию гидродинамического движения в хаотическую тепловую, прогревая вещество до нужных температур. Для представления о разнице в скоростях проведения реакции в этих двух режимах можно сопоставить скорость горения бикфордова — 1 см/с — и детонирующего — ~ 7 км/с — шнуров. Первый используют для безопасного подвода огня к взрывателю, а второй — для организации синхронного подрыва боеприпасов.

Существенные различия между режимами, изображенными на рис. 2.24, сохраняются и в неоднородном процессе: например, горении (взрыве) длинного цилиндра радиуса r типа как раз упомянутых шнуров. Для организации взрыва этого цилиндра необходимо, чтобы

был превышен критический параметр $(\rho r)_{\min}$ — только тогда реакции успевают пройти и тепло передаться свежим участкам, несмотря на паразитное (с точки зрения поддержания процесса) «расшвыривание» вещества вбок. Все эти качественные соображения выглядят весьма простыми и надежными, но строгая теория здесь, к сожалению, отнюдь еще не построена. Например, до сих пор не известны общие теоретические критерии перехода в детонационный режим (очень важные, скажем, для понимания динамики взрыва сверхновых звезд).

Но где же обещанная положительная роль излучения? Она возникает как следствие специально подчеркнутой в первой лекции «кинетики» фотонного компонента. Отдельные кванты не взаимодействуют между собой, но быстро перемещаются, успевая «обежать» среду со всех сторон и донести до всех ее участков свою энергию. Анализ лучистого транспорта (см. предыдущие лекции) показывает, что он приводит к предельной «размазанности» и гладкости температурного фона. Использование также (хотя и менее) быстрых электронов для передачи энергии на мишень вследствие различных гидродинамических неустойчивостей может приводить к образованию отдельных «струй» горячего вещества, не только не обеспечивающих, но даже разрушающих исходную симметрию процесса и, следовательно, к потере насущно необходимого (2.50).

Из этих простых соображений о природной склонности излучения к симметрии родилась доминирующая на сегодняшний день в схемах инерциального УТС (причем во всех видах — лазерного, пучкового и z -пинчевого) концепция так называемого hohlraum'a. В них допускается «лишняя» конверсия энергии драйвера в излучение с $T \sim 300$ эВ внутри полости с «отражающими» стенками, окружающими собственно термоядерную мишень. Горючее сжимает реактивная сила испаряющейся оболочки (см. рис. 2.22) и казалось бы нет особой разницы, в каком виде поставляется к ней необходимая энергия, лишь бы ее хватало. Тем не менее автоматически обеспечиваемая высокая симметрия процесса ценится дороже потерь при дополнительном энергопеределе. Впрочем, потери эти не так уж и велики. Например, КПД конверсии 2–3 гармоники неодимового лазера в такой ренген достигает $\sim 80\%$ — горячая плазма ($4 \div 5$ кэВ) тяжелых элементов очень интенсивно светит именно мягкими квантами (см. (2.46)). У пучков тяжелых ионов КПД хуже (температуры ниже), но зато «от розетки» он исходно больше. Правда, как часто говорят физики, жизнь богаче и существует альтернативная концепция fast ignition в лазерном термояде (и ее аналоги в пинчевых системах), связанная с предварительным сжатием горючего все-таки обычным мощным лазером с последующим поджигом малого участка

предельно короткоимпульсным другим лазером для инициации детонации подготовленного в смысле ρr остального вещества (типа упоминаемого выше «шнура»).

ЗАДАЧИ

1. Как связана с универсальным параметром ρr наработка вторичных продуктов в пределе слабого выгорания ($\alpha \ll 1$)? Рассмотреть три варианта, когда вторичные продукты возникают при реакциях первичных с исходными ядрами, между собой и со свободно покидающими зону нейтронами.

Решение. Эти варианты можно описать уравнениями

$$\dot{n}_2 = \langle \sigma' v \rangle n_1 n, \quad \dot{n}_2 = \langle \sigma'' v \rangle n_1^2, \quad \dot{n}_2 = \langle \sigma''' v \rangle n_1 n_n \quad (n_2(0) = 0),$$

причем входящие в правые части концентрации допускают представление в виде

$$n \approx \text{const}, \quad n_1 = \alpha n \approx \langle \sigma v \rangle n^2 t \propto n \rho r, \quad n_n \approx \langle \sigma v \rangle n^2 \tau_{\text{ВЫХ}} \propto n \rho r_{\text{ВЫХ}},$$

поскольку нейтронный баланс описывается уравнением

$$\dot{n}_n = \langle \sigma v \rangle n^2 - \frac{n_n}{\tau_{\text{ВЫХ}}}$$

с $\tau_{\text{ВЫХ}} \sim r/v_n \ll t$. Введенный для единообразия формальный «радиус выхода» $r_{\text{ВЫХ}} \sim c_S \tau_{\text{ВЫХ}} \ll r$. Соответственно для трех случаев

$$\frac{n_2}{n} \propto (\rho r)^2, \quad (\rho r)^3, \quad (\rho r)^2 \rho r_{\text{ВЫХ}},$$

и глубина «переработки» действительно растет вместе с универсальным параметром.

2. В разобранных схемах УТС главную роль играет излучательный перенос энергии, но не сама энергия излучения. А как обстоит дело с реакциями в звездах, каково, например, соотношение давлений электронного и равновесного фотонного компонентов плазмы в центре Солнца в области термоядерного энерговыделения? Считать, что здесь $n \sim 10^{26} \text{ см}^{-3}$, $T \sim 1,3 \text{ кэВ}$. Не следует ли учитывать в силовом балансе «холодное» фермиевское давление электронов $P_F = 2/3 \cdot n \mathcal{E}_F$? Что изменяется в иерархии для белых карликов с $n > 10^{29} \text{ см}^{-3}$ (в них, правда, синтез не происходит вследствие полного выгорания H и He на ранних стадиях эволюции)?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После того, как читатель ознакомился с курсом, автор может признать, что одним из побудительных мотивов его создания было стремление показать, что транспорт далеко не всегда описывается уравнением диффузии. Согласно стандартным, широко распространенным представлениям потоки тепла, частиц, полей и пр. в плазме в первом приближении локально связаны с неоднородностью температуры, концентрации и других ее параметров, так что перенос должен описываться грандиозной матрицей диффузионных коэффициентов, связывающей вектора всевозможных потоков со всевозможными же градиентами. Величина и расположение элементов этой матрицы зависит от характера движения электронов и ионов, и задача теории как раз в их вычислении — по Брагинскому ли, неоклассике или вообще на основе турбулентности (так называемые аномальные диффузия, теплопроводность или сопротивление). Так вот, существенной целью лекций было донесение до студентов давно и хорошо принятого в профессиональных кругах тезиса, что не единой диффузией жива природа. Заодно пришлось много места уделить и диффузии тоже, поскольку, несмотря на «общеупотребимость» модели, в литературе ее качественные физические особенности сообщаются весьма скупо. Насколько удалось достигнуть и этой, и других упомянутых во Введении целей — судить не автору.

Он может только поблагодарить всех своих коллег, без которых данная книга не могла бы появиться в принципе. Ему особенно повезло, что еще в студенческие годы оказался в теоретическом коллективе Л. И. Рудакова. В общении и совместной работе с его очень разными по стилю и по возрасту членами, складывалось представление «что есть что» в ЭМГ, плазме и физике вообще, нашедшее, по мере возможности, отражение в изложенном курсе. Отдельной строкой стоит отметить влияние старшего товарища В. В. Янькова и, конечно же,

учителя и руководителя А. С. Кингсепя, к слову сказать, на личном примере демонстрировавшем возможности печатного книжного слова. Что касается вопросов излучения, то наряду с уже упомянутыми В. И. Коганом и В. С. Лисицей надо сказать о А. В. Демуре и Ю. Г. Калининe.

Немалую роль в становлении данного курса сыграла и родная для автора кафедра физики и химии плазмы, сначала обучив автора, а потом, через 20 лет, переместив по другую сторону баррикад. Важную помощь оказали тогдашний заведующий В. Д. Русанов, поддержавший намерение прочесть несколько странных курс, и также В. Ф. Муравьев, стимулировавший написание «чего-нибудь методического».

Очень существенна была хотя и косвенная, но помощь со стороны студентов, прослушивавших лекции. С одной стороны, при объяснении привычных, окруженных огромным количеством нюансов вещей кому-то «на новенького» вы вынужденно отсекаете лишнее и выявляете (в том числе и для себя) истинный «скелет» явления. С другой — лишь за счет обратной связи в процессе чтения и при приеме экзамена выстраивается схема изложения материала (что, когда и как говорить), адекватная поставленной цели (чему и за какой срок научить), а бывает, изменяется и сама цель. Весьма полезной была и более тесная работа с собственными студентами и аспирантами. Выбранная форма книги (это именно «Лекции по», а не просто «Явления переноса») позволила излагать ситуацию более свободным языком, а также использовать экскурсы в историю и общие рассуждения о системе ценностей в науке.

Эксклюзивный распространитель
книг Издательского Дома «Интеллект» –
книготорговая фирма «Физматкнига»

Заявки на книги присылайте по адресам:

zakaz@id-intellect.ru

solo@id-intellect.ru

тел. (495) 410-24-63

факс (495) 408-76-81

В заявке обязательно указывайте
свои реквизиты (для организаций) и почтовый адрес

Подробная информация о книгах на сайте

<http://www.id-intellect.ru>

Константин Владимирович Чукбар

ЛЕКЦИИ

ПО ЯВЛЕНИЯМ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ

Компьютерная верстка – А.А. Пярнпуу

Корректор – М.В. Куткина

Художник – С.Ю. Биричев

Ответственный за выпуск – Л.Ф. Соловейчик

Формат 60x90/16. Печать офсетная.

Гарнитура Ньютон.

Печ. л. 16. Тираж 1500 экз. Зак. □ 1262

Бумага офсетная № 1, плотность 80 г/м²

Издательский Дом «Интеллект»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный,

Промышленный пр-д, д. 14,

тел. (495) 579-96-45

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, д. 15

К.В. ЧУКБАР

**ЛЕКЦИИ
ПО ЯВЛЕНИЯМ
ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ**